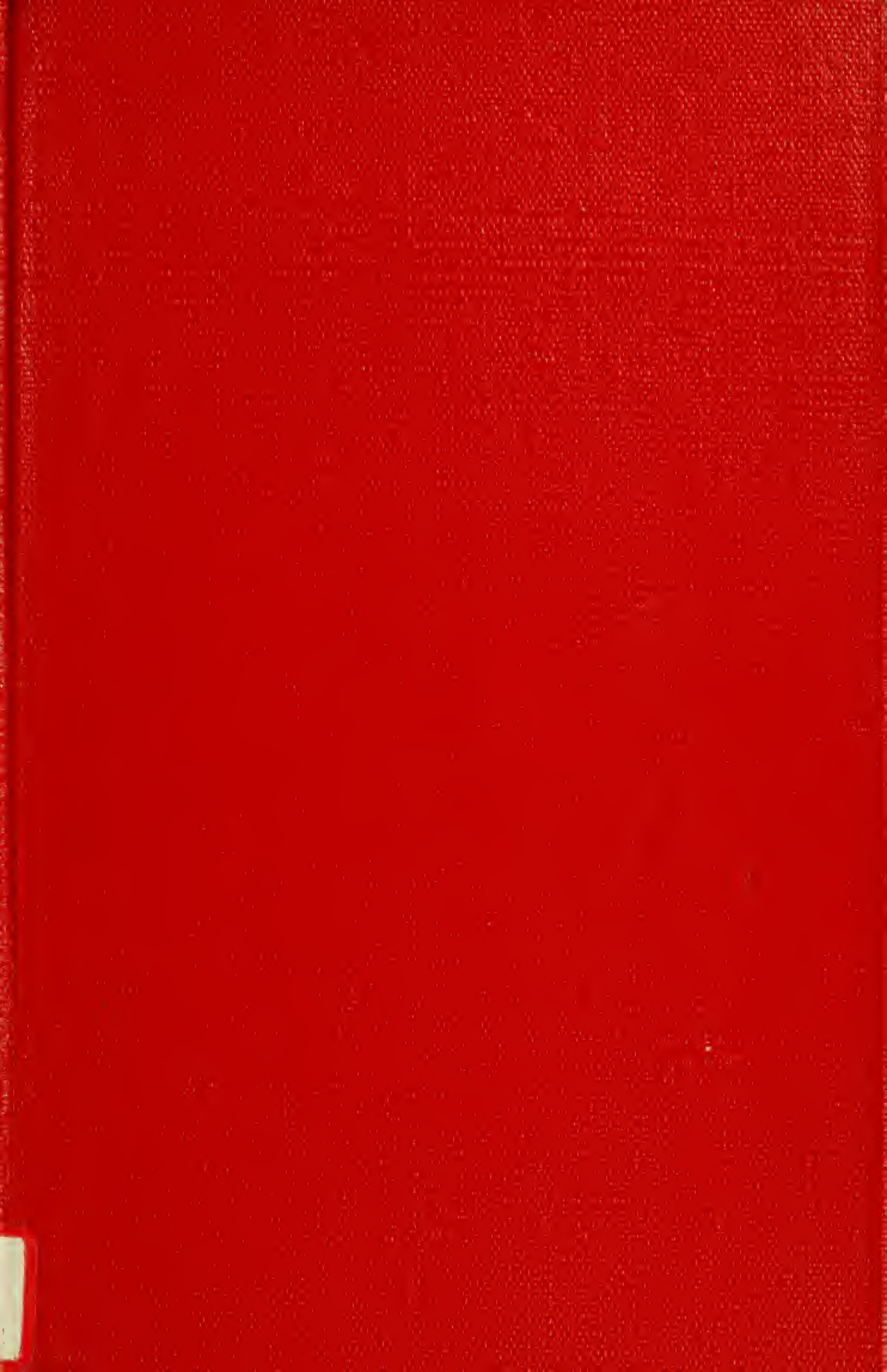
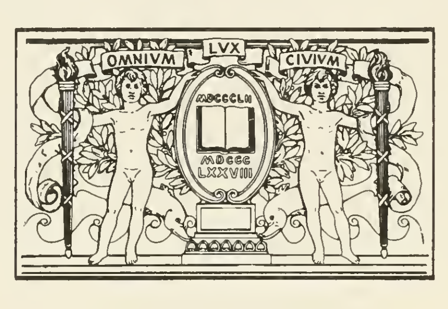
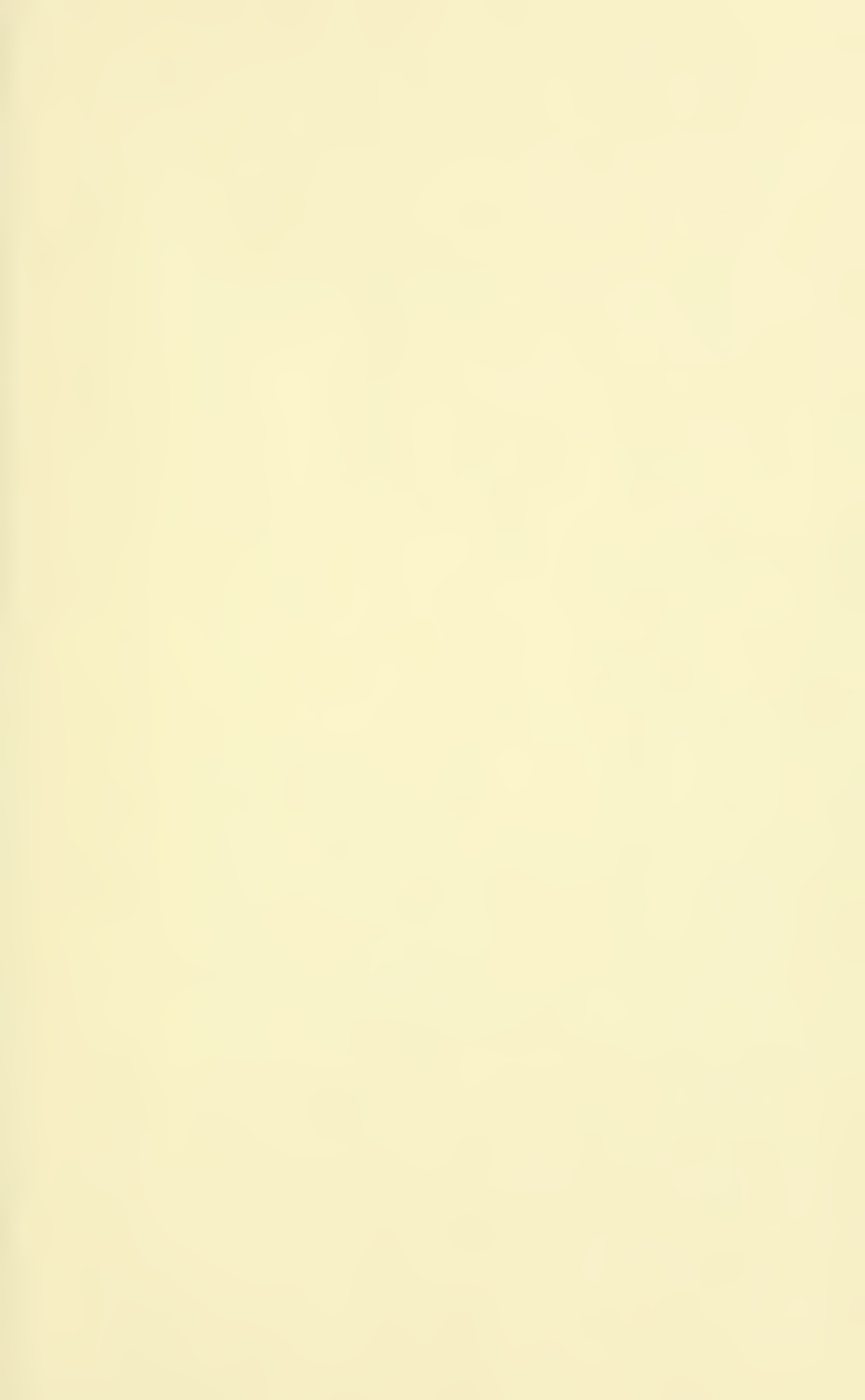




BOSTON
PUBLIC
LIBRARY











ANWENDUNG

DER

DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG

AUF

DIE ALLGEMEINE THEORIE

DER

FLÄCHEN UND DER LINIEN DOPPELTER KRÜMMUNG.

VON

F. JOACHIMSTHAL.



MIT 4 FIGURENTAFELN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1872.

QA643
.J62x

VORREDE.

Die in vorliegendem Werke der Oeffentlichkeit übergebenen Vorlesungen hat der der Wissenschaft und den Hörern viel zu früh entrissene Professor Ferdinand Joachimsthal an der Universität zu Breslau im Wintersemester 1856/57 gehalten, und den Herausgeber, der damals zu seinen Füssen sass, beauftragt, sie wortgetreu nachzuschreiben und für die Herausgabe druckfertig abzufassen. Nach Schluss der Vorlesungen empfing Herr Professor Joachimsthal das Manuscript und hatte nach eingehender Prüfung nichts Wesentliches daran auszusetzen; doch unterblieb die Herausgabe, wohl weil andere Gebiete der Mathematik, namentlich die Elemente der analytischen Geometrie, den hochverehrten Herrn beschäftigten. Wenn der Unterzeichnete erst jetzt, nachdem so viele Jahre verflossen sind, sich entschlossen hat, die Vorträge herauszugeben, so liegt der Grund hauptsächlich darin, dass er lange Anstand genommen hat, selber die letzte Hand an die Druckfertigstellung zu legen. Als er aber einmal daran gegangen war, gaben ihm die hohen Vorzüge des Werkes den Muth, diese Arbeit zu Ende zu bringen, indem er hoffte, dass, was etwa an der Art der Abfassung den Beifall der Kenner nicht haben sollte, über den inneren Vorzügen der Vorlesungen verziehen werden würde. Als solche Vorzüge sei es gestattet, hier — und zwar nicht blos nach der Meinung des Herausgebers, sondern auch nach dem Urtheile von namhaften Gelehrten, denen das Werk jetzt zur Prüfung vorgelegen hat — nur hervorzuheben, dass die Vorlesungen ein bestimmtes scharf abgegrenztes Gebiet in fasslicher und eleganter Darstellung behandeln, namentlich auch in ihnen die verschiedenen Disciplinen der Mathematik in geistreicher Weise zur Lösung der Probleme herangezogen sind, wie besonders die Geometrie an vielen Stellen die rechnende Lösung vorbereitet, oder ihr nachfolgend die gefundenen Resultate deutet.

Somit wird das Werk für Lernende eine nicht unwillkommene Gabe sein und Studirende der Mathematik an Universitäten und polytechnischen Schulen interessiren.

Reichenbach i. Schl.

Dr. Liersemann.



INHALT.

Einleitung.

Nachträge.

Einleitung.

§ 1.

Erklärung. Man nennt Curven doppelter Krümmung solche krumme Linien, deren sämmtliche Punkte nicht in Einer Ebene enthalten sind.

Anmerkung. Der Ausdruck: doppelte Krümmung ist zuerst gewählt worden von Clairaut und hatte bei ihm folgende Bedeutung. Wenn man sich eine ebene Curve auf zwei andere Ebenen, z. B. auf zwei Coordinatenebenen projicirt denkt, so werden im Allgemeinen beide Projectionen wiederum ebene Curven sein. Man kann jedoch eine der beiden Coordinatenebenen so wählen, dass die Projection der gegebenen Curve auf sie eine gerade Linie wird. Bei Curven dagegen, die nicht in Einer Ebene liegen, ist es unmöglich, dass die eine Projection jemals eine Gerade werde, und deshalb sagte Clairaut, eine solche Curve nehme an den Krümmungen beider Projectionen theil oder sei doppelter Krümmung. Heut zu Tage hat man die Bezeichnung beibehalten, ihr aber einen ganz andern Sinn beigelegt. Denkt man sich nämlich in irgend welcher Curve vier Punkte a, b, c, d, die möglichst nahe an einander liegen, so kann man offenbar die Gerade $\overline{ab}$ näherungsweise als die Richtung der Curve in diesem Punkte betrachten, ebenso $\overline{bc}$ und $\overline{cd}$, und offenbar ändert sich demnach die Richtung der Curve von einem Theile zum andern. In diesem Sinne hat also jede Curve eine Krümmung, sie mag eben sein oder nicht in Einer Ebene liegen. Diese Krümmung geht gleichsam daraus hervor, dass die successiven Tangenten der Curve sich beständig ändern. Liegt die Curve nun nicht in Einer Ebene, so hat sie noch eine andere Art der Krümmung: denkt man sich durch die drei Punkte a, b, c eine Ebene gelegt, und ebenso eine durch die drei Punkte b, c, d, so fallen diese beiden nach der Definition dieser Art Curven nicht zusammen, sondern die Gerade $\overline{bc}$ ist wirklich ihre Schnittlinie; es ändert sich also bei dieser Art Curven ebenfalls die Ebene, welche drei möglichst nahe Punkte der Curve in sich enthält: die Abweichung von der Richtung findet

somit nicht blos in der Tangente, sondern auch in der (cf. § 8.) sogenannten Schmiegungsebene der Curven doppelter Krümmung statt.

Von der doppelt gekrümmten Curve unterscheiden wir die Curve im Raume, welches irgend eine Curve ist, auch wenn sie in Einer Ebene liegt, aber betrachtet wird als nicht in einer der Coordinatenebenen liegend.

§ 2.

Lehrsatz. Wenn x, y, z irgendwelche, rechtwinklige oder schiefwinklige Coordinaten sind, so wird eine Curve im Raume analytisch durch zwei Gleichungen zwischen diesen drei Variabeln dargestellt. Dass zwei Gleichungen stattfinden müssen, ergiebt sich aus Folgendem: Denken wir uns ausser der Curve im Raume noch eine Ebene, die der xy Ebene parallel, sonst aber ganz beliebig ist, so haben alle Punkte dieser Ebene die z Coordinate gemeinschaftlich. Diese Ebene schneidet im Allgemeinen unsre Curve im Raume in einem oder mehreren Punkten, jedenfalls in einer bestimmten endlichen Anzahl von Punkten. Ist uns aber die Curve, d. h. ihr Gesetz bekannt, so müssen wir im Stande sein, zu jeder gegebenen Höhe z der Ebene ihren Durchschnittspunkt oder ihre Durchschnittspunkte in die gegebene Curve zu finden, und zwar vermittelst des Gesetzes der Raumcurve und des speciell gegebenen z. Dies heisst aber: Wir müssen, wenn z gegeben ist, x und y berechnen können, oder da man zwei Grössen finden soll: es müssen zwei Gleichungen zwischen ihnen und der Grösse z existiren, aus der man jene bestimmen soll.

Stellt man die so eben gemachte Betrachtung in Zeichen dar, so haben diese beiden Gleichungen folgende Form $\begin{cases} x = f(z) \\ y = \varphi(z) \end{cases}$. Sie haben aber auch noch eine andere Bedeutung. Die erste Gleichung nämlich $x = f(z)$ stellt eine ebene Curve und zwar eine Curve in der xz Ebene dar; mit jedem Punkte dieser Curve haben aber noch unzählig viele andere Punkte dasselbe x und dasselbe z, nämlich alle Punkte derjenigen Geraden, welche in dem fraglichen Punkte der Curve $x = f(z)$ normal auf der Ebene der xz errichtet werden kann. Die Gleichung $x = f(z)$ drückt also nicht nur die Curve in der xz Ebene aus, sondern alle Punkte desjenigen Cylinders, oder derjenigen cylindrischen Fläche, welche auf jener Curve in der xz Ebene normal steht. Ebenso genügen der Gleichung $y = \varphi(z)$ sämmtliche Punkte einer cylindrischen Fläche, die auf der Curve in der yz Ebene normal errichtet ist. (Die Bezeichnung normal bezieht sich natürlich nur auf rechtwinklige Coordinaten; das hier Gesagte

gilt aber auch für loxogonale Systeme, nur hat man dann statt normal auf der Ebene die Worte zu setzen: parallel der in der Ebene nicht enthaltenen Coordinatenaxe.) Da nun die Curve im Raume beiden Gleichungen genügt, so muss sie auf beiden Cylindern liegen oder der Durchschnitt dieser beiden Flächen sein: Das System der beiden Gleichungen $\begin{cases} x = f(z) \\ y = \varphi(z) \end{cases}$ stellt also die darin bezeichnete Raumcurve als die Durchschnittslinie der beiden cylindrischen Oberflächen $x = f(z)$, $y = \varphi(z)$ dar.

Betrachtet man dagegen jede dieser beiden Gleichungen nur als die der ebenen Curven in den Ebenen resp. der xz und yz, d. h. als die Gleichungen der Projectionen der gegebenen Raumcurve auf diese beiden Coordinatenebenen, so besteht die zweite, von der ersten wesentlich nicht verschiedene Art eine Raumcurve zu bestimmen darin, dass man sie durch ihre Projectionen auf zwei der Coordinatenebenen giebt. Zwei Projectionen sind nur nöthig, weil man die dritte leicht aus den Gleichungen der beiden ersten finden kann, indem man die ihnen gemeinschaftliche Ordinate, hier z, aus ihnen eliminirt. Denn hat man irgend zwei (von einander unabhängige) Gleichungen zwischen den Variabeln x, y, z und eliminirt eine, z. B. z, aus ihnen, so ist die resultirende Gleichung zwischen x und y die der Projection der durch die beiden gegebenen Gleichungen ausgedrückten Raumcurve auf die Ebene der xy.

§ 3.

Es giebt nun noch eine dritte Art der Darstellung der Curven, nämlich dass man jede der drei Coordinaten $x\ y\ z$ als eine Function von irgend einer vierten Grösse t darstellt: $\begin{cases} x = f(t) \\ y = f_1(t) \\ z = f_2(t) \end{cases}$. Zu dieser letzten Art der Darstellung bilden wir uns zwei Beispiele:

1) Die gerade Linie im Raume. Eine gerade Linie gehe durch einen bestimmten Punkt (a, b, c); eine ihrer beiden Hälften (von jenem Punkte an gerechnet) bilde mit den Coordinatenaxen die Winkel α, β, γ, (der andere Theil bildet also resp. die Winkel $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$, $\pi - \gamma$). Es seien nun $x\,y\,z$ die Coordinaten irgend eines Punktes dieser geraden Linie, welcher von dem Punkte (a, b, c) um r entfernt sein möge. Dann hat man für die erste Hälfte dieser Linie folgende drei Gleichungen: $\frac{x-a}{r} = \cos\alpha$, $\frac{y-b}{r} = \cos\beta$, $\frac{z-c}{r} = \cos\gamma$ oder, wie sich daraus ergiebt: $x = a + r.\cos\alpha$, $y = b + r.\cos\beta$,

$z = c + r. \cos\gamma$. Für den Punkt (x, y, z) aber auf der Hälfte die dieser entgegengesetzt ist, würde man haben: $\frac{x-a}{r} = -\cos\alpha$, $\frac{y-b}{r} = -\cos\beta$, $\frac{z-c}{r} = -\cos\gamma$, oder wiederum: $x = a - r. \cos\alpha$, $y = b - r. \cos\beta$, $z = c - r. \cos\gamma$. Man kann folglich sagen:

Man hat für sämmtliche Punkte dieser geraden Linie folgende Gleichungen:

$x = a + t. \cos\alpha$, $y = b + t. \cos\beta$, $z = c + t. \cos\gamma$. Die Bedeutung dieser Grösse t ist hier leicht einzusehen: für alle Punkte, welche auf der ersten Hälfte der Geraden liegen, ist sie dasselbe, wie die Entfernung r; für alle andern Punkte die Entfernung, mit dem Minus-Zeichen voran. Man erhält übrigens aus diesen drei Gleichungen sehr leicht die Projectionen dieser geraden Linie, indem man t eliminirt: $\frac{x-a}{\cos\alpha} = \frac{y-b}{\cos\beta} = \frac{z-c}{\cos\gamma}$.

2) Die Schraubenlinie. In der xy Ebene liege ein Kreis, siehe Fig. 1, dessen Mittelpunkt der Anfangspunkt der Coordinaten sei; und auf diesem Kreise stehe normal ein Cylinder. Da wo der Kreis die x Axe schneidet, fange ein Punkt an, sich an dem Cylinder in die Höhe zu bewegen, und zwar so, dass seine Steigung proportional ist dem Winkel, welchen seine Projection auf die xy Ebene in dieser Ebene, d. h. in dem Kreise beschreibt. Welches sind die Gleichungen dieser Curve? — Da jeder Punkt im Raume mit seiner Projection auf eine der drei Coordinatenebenen diejenigen beiden Coordinaten gemeinschaftlich hat, welche in diese Ebene fallen, so ist hier offenbar, wenn der Kreisradius a und der veränderliche Winkel in der xy Ebene t heisst, $x = a. \cos t$, $y = a. \sin t$, und zwar gelten diese beiden Gleichungen sowohl für den Hilfspunkt, der sich in der Ebene der xy bewegt wie für den die gesuchte Curve erzeugenden Punkt, der an dem Cylinder in die Höhe steigt. Hat nun der Hilfspunkt einmal die Peripherie 2π durchlaufen, so wird der eigentliche beschreibende Punkt eine gewisse constante Höhe b erreicht haben. Dieses b nennt man die Höhe eines Schraubenganges. Es ist nun $z : b = t : 2\pi$ oder $z = \frac{b.t}{2\pi}$; also sind gefunden die Gleichungen der Schraubenlinie: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = \frac{bt}{2\pi} \end{cases}$.

Dass diese Curve auf einem Kreiscylinder liegt, übersieht man leicht, wenn man t aus den beiden ersten Gleichungen eliminirt. Man erhält dadurch $x^2 + y^2 = a^2$, zunächst die Gleichung des Grundkreises, und dann die eines auf demselben normal errichteten Cylinders. Eliminirt man t aus der letzten und einer der beiden ersten

Gleichungen, so erhält man: $x = a . \cos \frac{2\pi z}{b}$ und $y = a . \sin \frac{2\pi z}{b}$, ebenfalls zwei Cylinder. Man kann aber t auch so eliminiren, dass die resultirende Gleichung alle drei Variabeln enthält: $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{2\pi z}{b}$. Was diese bedeutet, werden wir sogleich sehen.

§ 4.

Lehrsatz. Jede Gleichung zwischen drei Variabeln x, y, z stellt eine Fläche dar; und umgekehrt: Jede Fläche wird durch eine Gleichung zwischen drei Variabeln x, y, z ausgedrückt. Dies ist ebenfalls leicht zu übersehen. Denken wir uns nämlich eine Fläche nach irgend welchem Gesetze gebildet, und fällen von einem bestimmten Punkte dieser Fläche, den wir uns fixiren, die z Ordinate herunter, so trifft diese einen ebenfalls bestimmten Punkt der xy Ebene. Umgekehrt liegt über jedem Punkte der xy Ebene ein gewisser Punkt der Fläche, der ein bestimmtes z hat. Man muss also im Stande sein, aus den Coordinaten x und y eines Punktes der Fläche seine Höhe über der xy Ebene, d. h. sein z zu finden. Es muss also z entweder explicite oder implicite als Function von x und y, oder eine Gleichung von der Art $z = f(x, y)$ resp. $F(x, y, z) = 0$ gegeben sein.

Die Gleichung $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{2\pi z}{b}$ drückt also eine Fläche aus, auf welcher die Schraubenlinie liegt, und zwar eine durch eben diese Gleichung ganz bestimmte Fläche, die man die Schraubenfläche nennt. Man bemerkt leicht folgendes: die Schraubenlinie ist durch zwei Constante gegeben, die Schraubenfläche enthält nur eine; auf dieser Fläche liegt daher nicht blos die eine Schraubenlinie, sondern überhaupt alle Schraubenlinien, die dasselbe b, d. h. dieselbe Ganghöhe haben. Man kann sich daher die Schraubenfläche so versinnbildlichen, dass man sich von der Axe des leitenden Cylinders aus einen horizontalen Strahl nach der Schraubenlinie gezogen denkt, und diesen stets horizontal so weiter bewegt, dass er nacheinander alle Punkte der Cylinderaxe und alle Punkte der Schraubenlinie durchläuft. Natürlich hat man sich diesen Strahl nicht gleich einem bestimmten a, sondern nach beiden Seiten hin unendlich zu denken, denn a kommt eben in der Gleichung der Schraubenfläche nicht vor.

Erster Abschnitt: Curven im Raume.

1. Tangente und Normalebene.

§ 5.

Erklärung. Tangente einer Curve ist diejenige Linie, welche durch einen Curven-Punkt und einen ihm unendlich nahen zweiten Punkt der Curve gezogen ist; d. h. man denke sich zunächst durch irgend welche zwei Punkte einer Curve eine gerade Linie (Sehne) gezogen, und lasse alsdann den zweiten Curvenpunkt sich dem ersten immer mehr nähern, wobei er sich natürlich auf der Curve selbst bewegt; alsdann ist die Tangente die Grenzlage dieser beweglichen Geraden.

Aufgabe. An einen gegebenen Punkt (x, y, z) einer (durch ihre Gleichungen) gegebenen Curve die Tangente zu ziehen. Betrachten wir die Coordinaten der Curve x, y, z als Functionen der vierten unabhängigen Variabeln t und lassen wir einem zweiten Werthe $t + h$ dieser Variabeln einen zweiten Curvenpunkt x_1, y_1, z_1 entsprechen, d. h. einen Punkt, dessen Coordinaten sind:

$$x_1 = x + h.\frac{dx}{dt} + \frac{h^2}{1.2}\cdot\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + \cdots, \quad y_1 = y + h.\frac{dy}{dt} + \frac{h^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) + \cdots,$$
$$z_1 = z + h.\frac{dz}{dt} + \frac{h^2}{1.2}\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) + \cdots$$

so sind die beiden Gleichungen einer Geraden, welche durch diese zwei Punkte hindurchgeht, $\frac{\xi - x}{x_1 - x} = \frac{\eta - y}{y_1 - y} = \frac{\zeta - z}{z_1 - z}$, wenn wir $\xi\,\eta\,\zeta$ ihre laufenden Coordinaten nennen. Setzt man statt der Coordinaten x_1, y_1, z_1 ihre Werthe ein, so bekommt man drei Brüche, die h als gemeinschaftlichen Factor im Nenner haben: multiplicirt man daher alle drei Brüche mit dieser Grösse, so erhält man:

$$\frac{\xi - x}{\frac{dx}{dt} + \frac{h}{2}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)} = \frac{\eta - y}{\frac{dy}{dt} + \frac{h}{2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)} = \frac{\zeta - z}{\frac{dz}{dt} + \frac{h}{2}\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)}.$$

Nach der obigen Erklärung haben wir nun zur Gränze überzugehen, d. h. h verschwindend klein zu setzen gegen endliche Summanden, indem der zweite Punkt unmittelbar neben dem ersten liegen soll. Somit erhalten wir endlich als die Gleichungen der Tangente

$$\frac{\xi - x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\eta - y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{\zeta - z}{\frac{dz}{dt}},$$

ganz gleich was für Coordinaten gewählt werden, rechtwinklige oder schiefwinklige; denn die Gleichung der Geraden, von der wir ausgegangen sind, ist ganz unabhängig von der Wahl der Coordinaten.

Anmerkung. Man kann diese Gleichungen auch ohne solch umständliche Betrachtungen finden. Man kann nämlich die Gleichungen $\frac{\xi - x}{x_1 - x} = \frac{\eta - y}{y_1 - y} = \frac{\zeta - z}{z_1 - z}$, von denen wir wiederum ausgehen, auch so schreiben:

$$\frac{\xi - x}{\frac{x_1 - x}{h}} = \frac{\eta - y}{\frac{y_1 - y}{h}} = \frac{\zeta - z}{\frac{z_1 - z}{h}}.$$

Lässt man hierin h immer kleiner werden, so ist ja $\lim \left(\frac{x_1 - x}{h}\right)$ gerade das, was man $\frac{dx}{dt}$ schreibt, denn es ist der Zuwachs der Function x, dividirt durch den Zuwachs der unabhängigen Variabeln t. Dadurch ergeben sich sogleich die obigen Gleichungen.

§ 6.

Die Neigung, welche die Tangente zu den drei Coordinatenaxen hat, bestimmt sich nach den allgemeinen Formeln für die Neigung einer Geraden zu den Axen. Sind α, β, γ die Winkel, welche die Tangente resp. mit der x-, y-, z-Axe bildet, so findet man

$$\cos\alpha = \frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}, \quad \cos\beta = \frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}$$

$$\text{und} \quad \cos\gamma = \frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}.$$

So ist z. B. für die Schraubenlinie, wo $x = a.\cos t$, $y = a.\sin t$, $z = \frac{bt}{2\pi}$ ist,

$$\cos\alpha = \frac{-a\sin t}{\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4\pi^2}}}, \quad \cos\beta = \frac{a\cos t}{\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4\pi^2}}},$$

$$\cos\gamma = \frac{b}{2\pi\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4\pi^2}}} = \frac{b}{\sqrt{4a^2\pi + b^2}}.$$

Unter diesen Ausdrücken ist der letzte der interessanteste, indem er die Grösse t gar nicht enthält: der Winkel γ ist also constant

für alle Punkte der Schraubenlinie, oder die Tangente der Schraubenlinie bildet mit der z Axe einen constanten Winkel. Da der Winkel, den sie mit der xy Ebene bildet, das Complement dieses constanten Winkels ist, so kann man auch sagen: die Neigung der Schraubenlinie gegen die Ebene des Grundkreises ist constant. Dies ist von vornherein klar, wenn man sich ihre Entstehung (s. Fig. 2) durch die Diagonale eines Rechtecks denkt, dessen Grundlinie natürlich die Peripherie des Grundkreises $2a\pi$, und dessen Höhe die Ganghöhe b ist. So ist der Satz für die Schraubenlinien klar, die auf Kreis-Cylindern beschrieben sind; nach unserer Formel folgt aber seine Richtigkeit auch wenn der Cylinder eine andre Basis hat.

Bemerkung. Die $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$ hat eine sehr einfache Bedeutung. Nimmt man nämlich einen beliebigen Punkt der Curve als Anfangspunkt der Bogen s, die von da an jeder bis zu einem für ihn bestimmten Punkte x, y, z gezählt werden, so wird diese Grösse s ausser von den gegebenen constanten Coordinaten des Ausgangspunktes noch eine Function der Grösse t sein, und zwar lässt sich leicht der Differentialquotient dieser Function nach t finden; es ist nämlich $\frac{ds}{dt}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$. Denn die Länge eines Bogens ist die Gränze für die Summe der Seiten der Polygone die man der Curve einschreiben kann. Das Bogenelement ds ist also gleich der unendlich kleinen Sehne zwischen zwei unendlich nahen Punkten $x\,y\,z$, $x+dx\; y+dy\; z+dz$; die Entfernung dieser beiden Punkte von einander wird aber eben durch die $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$ gegeben.

So ist in Bezug auf die Schraubenlinie $\frac{ds}{dt}=\sqrt{a^2+\frac{b^2}{4\pi^2}}$, oder $s=t\sqrt{a^2+\frac{b^2}{4\pi^2}}+c$, worin sich die Constante c nach dem Werthe von t richtet, für welchen $s=0$ sein soll. Lässt man z. B. die Schraubenlinie von der xy Ebene anfangen, so ist $s=0$ für $t=0$. Bei diesem Anfange der Schraubenlinie, den wir übrigens von vorn herein festgesetzt haben, ist also $s=t.\sqrt{a^2+\frac{b^2}{4\pi^2}}$. Nehmen wir einen Gang der Schraubenlinie, so ist $t=2\pi$, also $s=\sqrt{(2a\pi)^2+b^2}$, was auch nach dem Pythagoreischen Satze aus dem obenerwähnten Rechtecke klar ist.

Folgerung. Man kann somit die obigen drei Brüche auch so schreiben: $\cos\alpha=\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{ds}{dt}}$ oder, führt man den Bogen als unabhängige

Veränderliche ein: $\cos\alpha = \frac{dx}{ds}$, $\cos\beta = \frac{dy}{ds}$, $\cos\gamma = \frac{dz}{ds}$. Dabei ist $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$ und durch nochmalige Differentiation nach dem als unabhängig angesehenen s: $\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} = 0$.

§ 7.

Von Einer Normale einer Curve im Raume kann nicht wohl die Rede sein: es giebt in jedem Punkte der Curve unzählig viele Normalen, denn es lassen sich auf der Tangente als einer geraden Linie im Raume in jedem Punkte, folglich auch im Berührungspunkte unzählig viele Linien normal errichten, welche alle in Einer Ebene liegen. Daher spricht man bei solchen Curven von einer Normalebene und versteht darunter diejenige, welche im Berührungspunkte auf der Tangente normal steht, und deren Gleichung somit ist: $\frac{dx}{dt}(\xi - x) + \frac{dy}{dt}(\eta - y) + \frac{dz}{dt}(\zeta - z) = 0$.

2. Schmiegungsebene.

§ 8.

Erklärung. Der Curve im Raume eigentümlich ist die Osculations- oder Schmiegungsebene. Man nennt Schmiegungsebene einer Curve diejenige Ebene, die durch drei unendlich nahe Punkte geht oder, was dasselbe sagen will, die durch zwei unendlich nahe Tangenten gelegt wird.

Die Aufgabe, die Gleichung der Schmiegungsebene zu finden, löst man hiernach, indem man sich zunächst drei in endlicher Entfernung von einander liegende Punkte der Curve denkt: einen Punkt A, der einem gewissen Werthe von t entspricht, ferner dem Werthe $t + h$ entsprechend einen zweiten Punkt B und endlich dem Werthe $t + 2h$ entsprechend einen dritten Punkt C. Durch diese drei Punkte legt man eine Ebene und sucht ihre Gleichung auf für den Fall, dass h sich der Null ohne Ende nähert.

Die Coordinaten der drei Punkte seien $x\,y\,z$, $x_1\,y_1\,z_1$, $x_2\,y_2\,z_2$ oder nach der bekannten Bezeichnung $x\,y\,z$, $x + \Delta x\;\; y + \Delta y\;\; z + \Delta z$, $x + 2\Delta x + \Delta^2 x\;\; y + 2\Delta y + \Delta^2 y\;\; z + 2\Delta z + \Delta^2 z$. Dann ist die Gleichung einer Ebene, die durch den Punkt A geht: $a(\xi - x) + b(\eta - y) + c(\zeta - z) = 0$; derselben Ebene, da sie auch durch den Punkt B gehen soll: $a.\Delta x + b.\Delta y + c.\Delta z = 0$; und endlich insofern sie auch durch den Punkt C gehen soll, wird deswegen ihre Gleichung: $a(2\Delta x + \Delta^2 x) + b(2\Delta y + \Delta^2 y) + c(2\Delta z + \Delta^2 z) = 0$. Die letztere Gleichung lässt sich offenbar mit Hilfe der vorletzten,

einfacher so schreiben: $a.\Delta^2 x + b.\Delta^2 y + c.\Delta^2 z = 0$. Es ist somit $a:b:c = (\Delta y\,\Delta^2 z - \Delta z\,\Delta^2 y):(\Delta z\,\Delta^2 x - \Delta x\,\Delta^2 z):(\Delta x\,\Delta^2 y - \Delta y\,\Delta^2 x)$ oder

$$\frac{a}{\Delta y\,\Delta^2 z - \Delta z\,\Delta^2 y} = \frac{b}{\Delta z\,\Delta^2 x - \Delta x\,\Delta^2 z} = \frac{c}{\Delta x\,\Delta^2 y - \Delta y\,\Delta^2 x}.$$

Somit ist die Gleichung einer Ebene, die durch irgend welche drei Punkte A, B, C geht, folgende:

$$(\Delta y\,\Delta^2 z - \Delta z\,\Delta^2 y)(\xi - x) + (\Delta z\,\Delta^2 x - \Delta x\,\Delta^2 z)(\eta - y) + (\Delta x\,\Delta^2 y - \Delta y\,\Delta^2 x)(\zeta - z) = 0.$$

Geht man nun zur Grenze über, nachdem man vorher mit $h.h^2$ die ganze Gleichung dividirt hat, so wird die Gleichung der Schmiegungsebene:

$$\left(\frac{dy}{dt}\frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{dz}{dt}\frac{d^2 y}{dt^2}\right)(\xi - x) + \left(\frac{dz}{dt}\frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{dx}{dt}\frac{d^2 z}{dt^2}\right)(\eta - y) + \left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2 x}{dt^2}\right)(\zeta - z) = 0.$$

§ 9.

Es ist aber von der grössten Wichtigkeit, gar nicht diesen Uebergang vom Endlichen zum unendlich Kleinen machen zu dürfen, sondern sogleich mit unendlich kleinen Grössen rechnen zu können. Dies ganze Gebiet umfasst die Aufgabe: die Constanten a, b, c, d......, welche in die Gleichung einer Fläche

$$F(\xi, \eta, \zeta, a, b, c, d\ldots\ldots) = 0$$

eingehen, so zu bestimmen, dass die Fläche durch eben so viele gegebene Punkte geht.

Dass die Aufgabe möglich ist, sieht man sofort. Denn hat die Gleichung der Fläche etwa 4 Constante oder Parameter, sind also 4 bestimmende Punkte $x\,y\,z$, $x_1\,y_1\,z_1$, $x_2\,y_2\,z_2$, $x_3\,y_3\,z_3$ gegeben, so bestehen ihretwegen folgende 4 Gleichungen: $F(x, y, z, a, b, c, d) = 0$; $F(x_1, y_1, z_1, a, b, c, d) = 0$; $F(x_2, y_2, z_2, a, b, c, d) = 0$;

$$F(x_3, y_3, z_3, a, b, c, d) = 0,$$

so dass die Parameter vollständig bestimmt sind. Es folgt hieraus zum Beispiel unmittelbar, dass sich im Allgemeinen durch 4 Punkte eine Kugel legen lässt; — natürlich kann es bei der Auflösung der vier Gleichungen auch vorkommen, dass sich Widersprüche zeigen, oder dass eine Gleichung in den andern enthalten ist: dies sind aber Specialitäten, auf die wir hier nicht eingehen. Solche Fälle treten z. B. auf, wenn eine Kugel durch vier Punkte zu legen ist, von denen 3 in einer Geraden oder die alle in Einem Kreise liegen: die Kugel ist alsdann unmöglich, resp. unbestimmt.

Um die Aufgabe zu Ende zu bringen, setzen wir fest, dass die Coordinaten $x\,y\,z$ Functionen von t sind, $x_1\,y_1\,z_1$ resp. dieselben

Functionen von $t+h$, $x_2 y_2 z_2$ von $t+2h$, $x_3 y_3 z_3$ von $t+3h$. Alsdann sind offenbar die 4 Parameter Functionen von t und h. Die Aufgabe, die sich nun beständig wiederholt, ist die, zu wissen, welches die Grenzwerthe von a, b, c, d sind für den Fall, dass man h immer kleiner werden lässt? d. h. welches sind die Werthe von a, b, c, d, wenn die Fläche durch vier unendlich nahe Punkte gehen soll? Bezeichnet man die 4 obigen Gleichungen resp. durch $F=0$, $F_1=0$, $F_2=0$, $F_3=0$, so kann man offenbar zur Bestimmung von $a\ b\ c\ d$ an Stelle dieser vier Gleichungen irgend vier andre wählen, welche sich aus ihnen ableiten lassen, vorausgesetzt, dass aus diesen neuen sich wiederum die gegebenen herleiten lassen. Wir wählen folgendes System: $F=0$; $F_1-F=0$; $F_2-2F_1+F=0$; $F_3-3F_2+3F_1-F=0$, von denen es keine Frage ist, dass sie den vorigen 4 äquivalent sind. Dividiren wir sie der Reihe nach durch $1, h, h^2, h^3$, so enthält die erste ausser a, b, c, d nur noch t, die andern ausserdem noch h. Wird nun h immer kleiner und kleiner, so bleibt deshalb die erste Gleichung unverändert $F=0$, die andern werden resp. $\frac{dF}{dt}=0$, $\frac{d^2F}{dt^2}=0$, $\frac{d^3F}{dt^3}=0$.

Der Uebergang zur Auffindung mehrerer Parameter ist leicht. Um also die Werthe von n constanten Parametern dadurch zu bestimmen, dass die Fläche durch n unendlich nahe Punkte gehen soll, bilde man sich die $\overline{n-1}$ ersten Differentialgleichungen der gegebenen Gleichung $F=0$ nach irgend einer unabhängigen Variabeln t. Man hat dann in Summa n Gleichungen, welche zur Bestimmung der n Parameter ausreichend und nöthig sind.

§ 10.

Angewendet auf die Gleichung der Schmiegungsebene ergiebt dies folgende Rechnung:

Unter den angegebenen Voraussetzungen hat man $a\xi+b\eta+c\zeta-1=0$, und bildet sich daraus noch folgende drei Gleichungen: $ax+by+cz=1$, worin $x\ y\ z$ Functionen von t sind; ferner

$$a\frac{dx}{dt}+b\frac{dy}{dt}+c\frac{dz}{dt}=0 \text{ und endlich } a\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{d^2y}{dt^2}+c\frac{d^2z}{dt^2}=0.$$

Aus diesen beiden letzten Gleichungen lassen sich offenbar die Verhältnisse der drei Grössen a, b, c finden, welche man in folgender Form schreiben kann:

$$a=\lambda\left(\frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right),\ b=\lambda\left(\frac{dz}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right),$$

$$c=\lambda\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right).$$

Setzt man diese Werthe in die erste Gleichung ein, so lässt sich λ daraus bestimmen, und der dafür gefundene Werth wird alsdann in die zweite eingetragen. Oder auch: wir tragen diese Werthe von $a\ b\ c$ in die Gleichung $a(\xi-x)+b(\eta-y)+c(\zeta-z)=0$ ein, welche die Differenz der beiden ersten ist; dadurch hebt sich der Factor λ fort, und wir finden dieselbe Gleichung für die Schmiegungsebene wie in § 8.

3. Osculationskreis.

§ 11.

Ebenso lässt sich die Aufgabe lösen: den Osculationskreis d. h. denjenigen zu finden, der durch drei unendlich nahe Punkte einer gegebenen Curve geht. Die Gleichung des Kreises im Raume geben wir durch die Gleichung seiner Ebene und die einer der Kugeln, die ihn aus dieser Ebene ausschneiden, und deren es natürlich unzählige giebt: unter diesen wählen wir diejenige Kugel, die mit dem Kreise den Mittelpunkt gemein hat, von der also der Kreis ein Aequator ist. Der Radius des Kreises sei r, die Coordinaten seines Mittelpunktes $\alpha\ \beta\ \gamma$. Dann ist die Gleichung der Kugel folgende: $\overline{\xi-\alpha}^2+\overline{\eta-\beta}^2+\overline{\zeta-\gamma}^2=r^2$. Da diese Kugel durch den Punkt $x\ y\ z$ und zwei ihm unendlich nahe gehen soll, so haben wir folgende Gleichungen: $\overline{x-\alpha}^2+\overline{y-\beta}^2+\overline{z-\gamma}^2=r^2 \ldots\ldots (1)$

$$\overline{x-\alpha}\,\frac{dx}{dt}+\overline{y-\beta}\,\frac{dy}{dt}+\overline{z-\gamma}\,\frac{dz}{dt}=0 \ldots\ldots (2),$$

$$\overline{x-\alpha}\,\frac{d^2x}{dt^2}+\overline{y-\beta}\,\frac{d^2y}{dt^2}+\overline{z-\gamma}\,\frac{d^2z}{dt^2}+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=0$$

oder

$$\overline{x-\alpha}\,\frac{d^2x}{dt^2}+\overline{y-\beta}\,\frac{d^2y}{dt^2}+\overline{z-\gamma}\,\frac{d^2z}{dt^2}=-\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \ldots\ldots (3).$$

Dazu kommt noch die Gleichung der Ebene, die durch die gegebenen drei unendlich nahen Punkte gehen soll; d. h. es kommt noch dazu die Gleichung der Osculationsebene im Punkte $x\ y\ z$, die auch den Punkt $\alpha\ \beta\ \gamma$ enthält:

$$\overline{x-\alpha}\left\{\frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right\}+\overline{y-\beta}\left\{\frac{dz}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right\}$$
$$+\overline{z-\gamma}\left\{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right\}=0 \ldots\ldots (4).$$

Man findet zunächst aus (2) und (4) das Verhältnis $x-\alpha : y-\beta : z-\gamma$, nämlich es wird

$$\overline{x-\alpha}=\lambda\left\{\frac{dy}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right)-\frac{dz}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right)\right\}$$
$$=\lambda\left\{\frac{dx}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right)-\frac{d^2x}{dt^2}\left(\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)\right\}$$

oder, wenn man zum Minuenden $\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}$ und zum Subtrahenden $\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ hinzufügt, wodurch die Gleichung nicht geändert wird, und $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$ sich in $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ und demgemäss

$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}$ sich in $\frac{1}{2}\frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{dt}$ oder $\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}$ zusammenzieht:

$$\overline{x-\alpha}=\lambda\left\{\frac{dx}{dt}\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}-\frac{d^2x}{dt^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right\}$$

oder endlich

$$\overline{x-\alpha}=\lambda\frac{ds}{dt}\left\{\frac{dx}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}-\frac{ds}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right\};$$

ebenso wird

$$\overline{y-\beta}=\lambda\frac{ds}{dt}\left\{\frac{dy}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}-\frac{ds}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right\}\text{ und }\overline{z-\gamma}=\lambda\frac{ds}{dt}\left\{\frac{dz}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}-\frac{ds}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right\}.$$

Substituirt man diese drei Werthe in die Gleichung (3), so findet man λ; es wird nämlich

$$\lambda\frac{ds}{dt}\left\{\frac{d^2s}{dt^2}\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right)-\frac{ds}{dt}\left(\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2\right)\right\}$$

oder

$$\lambda\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\left\{\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2-\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2-\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2-\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2\right\}=-\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

also

$$\lambda=\frac{1}{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2-\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2}.$$

Hiernach wird

$$\overline{x-\alpha}=\frac{\frac{ds}{dt}\left\{\frac{dx}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}-\frac{ds}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right\}}{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2-\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2}$$

und ähnlich $\overline{y-\beta}$ und $\overline{z-\gamma}$ ..... (5).

Endlich findet man r aus (1):

$$r^2=\lambda^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\left\{\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)\right.$$
$$\left.-2\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right)+\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\left(\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2\right)\right\}$$

d. i.

$$=\lambda^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\left\{\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^2-2\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}+\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\left(\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2\right)\right\}$$

oder

$$=\lambda^2.\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\cdot\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\cdot\frac{1}{\lambda}$$

oder endlich

$$r = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2}} \cdots\cdots\cdots (6).$$

§ 12.

Eine ganz besonders einfache Form nehmen diese Gleichungen an, wenn man zur Unabhängigen t den Bogen s nimmt. Dann ist nämlich $\frac{ds}{dt} = 1$, $\frac{d^2s}{dt^2} = 0$, und man erhält demzufolge, wenn man die Differentiation nach s durch Accente bezeichnet:

$$r = \frac{1}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}} \cdots\cdots\cdot (7)$$

und $\alpha - x = x''.r^2 \quad \beta - y = y''.r^2 \quad \gamma - z = z''.r^2 \cdots\cdots\cdot (8)$.

Bezeichnen wir ferner die drei Winkel, welche die Richtung vom Curvenpunkte nach dem Krümmungsmittelpunkte hin, also in das Innere der Curve hinein, mit den drei Axen bildet, durch λ, μ, ν, so haben wir $\cos\lambda = \frac{\alpha - x}{r}$ u. s. f.; wir bekommen also für die Winkel, die der Krümmungsradius mit den drei Axen bildet, der Krümmungsradius genommen in der Richtung vom Curven-Punkte nach dem Krümmungsmittelpunkte hin, die Gleichungen:

$$\cos\lambda = x''.r \qquad \cos\mu = y''.r \qquad \cos\nu = z''.r \cdots\cdots\cdot (9).$$

Anmerkung. Es könnte scheinen als wären die Formeln (7) und (8) specieller als die Formeln (6) und (5), insofern als bei ihnen eine ganz bestimmte unabhängige Variable gegeben ist, nämlich der Bogen, während bei den ersten Formeln die unabhängige t ganz unbestimmt gelassen worden ist. Man kann jedoch auch umgekehrt von den Formeln (7) und (8) auf die Formeln (6) und (5) kommen. Angenommen, man habe eine Function x von s und führe eine neue Variable t ein, so wird nun x eine Function von t. Will man also die alten Differentialquotienten x' x'' u. s. f. durch die neuen $\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}$ u. s. f. ausdrücken, so verfährt man so:

$$\frac{dx}{dt} = x'.\frac{ds}{dt}, \text{ also } x' = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{ds}{dt}};$$

ferner
$$x'' = \frac{dx'}{ds} = \frac{\frac{dx'}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\frac{ds}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}.$$

Setzt man diesen Werth von x'' in die Formeln (7) und (8) ein, so erhält man die Formeln (6) und (5).

§ 13.

Excursus. Die Formeln (9) werden gebraucht, wenn man die sogenannte Centrifugalkraft darstellen will. Wenn ein materieller Punkt sich in einer Curve bewegt und zwar so, dass man das Bewegungsgesetz vollständig kennt, d. h. dass man in jedem Augenblicke angeben kann wo der Punkt sich befindet (analytisch: sind die Coordinaten $x\,y\,z$ der Bahn gegeben als Functionen der Zeit t): so hat man aus den Principien der Mechanik auch ein Mittel, diejenigen Kräfte anzugeben, welche gerade diese Bewegung hervorbringen; es ist nämlich die Ursache für diese Bewegung, wenn man mit m die Masse des Punktes bezeichnet, eine Kraft, deren drei rechtwinklige Componenten so heissen: $m\frac{d^2x}{dt^2}$, $m\frac{d^2y}{dt^2}$, $m\frac{d^2z}{dt^2}$. Man kann aber diese Kraft statt nach den drei Axen auch auf unzählig viele andre Weisen zerlegen, z. B. nach Tangente und Krümmungsradius der Curve. Denn es ist

$$\frac{d^2x}{dt^2} \text{ oder } \frac{d\frac{dx}{dt}}{dt} \text{ oder } \frac{d\left(\frac{dx}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}\right)}{dt} \text{ gleich } \frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{ds}{dt}\cdot\left(\frac{d^2x}{ds^2}\cdot\frac{ds}{dt}\right).$$

Nun sind aber $x'\,y'\,z'$ die Cosinus der Winkel $\alpha\,\beta\,\gamma$, welche die Tangente mit den drei Axen bildet, und $x''\,y''\,z''$ sind resp. die Cosinus der Winkel $\lambda\,\mu\,\nu$ (§ 12.) dividirt durch r; es ist also

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=m\cos\alpha\frac{d^2s}{dt^2}+m\cos\lambda\frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{r},$$

oder da $\frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit v bezeichnet $\left(\text{und } \frac{d^2s}{dt^2}=\frac{dv}{dt} \text{ ist}\right)$:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=m\cos\alpha\frac{d^2s}{dt^2}+m\cos\lambda\frac{v^2}{r};$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=m\cos\beta\frac{d^2s}{dt^2}+m\cos\mu\frac{v^2}{r};$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=m\cos\gamma\frac{d^2s}{dt^2}+m\cos\nu\frac{v^2}{r};$$

d. h. die ganze bewegende Kraft kann man sich zusammengesetzt denken aus zweien, von denen die eine, $m\frac{d^2s}{dt^2}$ mit den Axen die Winkel $\alpha\,\beta\,\gamma$, die andere, $m\frac{v^2}{r}$, die Winkel $\lambda\,\mu\,\nu$ bildet; oder: Man kann die bewegende Kraft zerlegen in die Tangentialkraft $m\frac{d^2s}{dt^2}$ und in die (Normal-)Kraft $m\frac{v^2}{r}$, die nach dem Krümmungsradius und zwar vom Curvenpunkte nach dem Krümmungsmittelpunkte zu wirkt, und die wir normale Componente nennen (besser denn Centri-fugal- oder -petal-Kraft).

§ 14.

Die Aufgabe, durch drei Punkte einen Kreis zu legen, welche in der Geometrie zu den einfachsten gehört, lässt sich noch viel einfacher als bisher geschehen durch gewisse geometrische Betrachtungen lösen. Eine solche Herleitung, die sich jedoch nur auf die Grösse des Krümmungsradius, nicht aber auf die Lage des Krümmungsmittelpunktes bezieht, ist folgende:

Der Auffassung des osculatorischen Kreises als Krümmungskreis liegt die Voraussetzung zu Grunde, dass man in einer unendlich kleinen Ausdehnung, nach der einen und der anderen Seite des Berührungspunktes, den Kreis für die Curve nehmen dürfe und umgekehrt, siehe Fig. 3. Man bezeichne nämlich den Bogen der Curve von einem bestimmten festen Punkte a bis zu einem veränderlichen Punkte, mit s, und den Winkel, den die beiden Tangenten in a und b bilden, mit w, so werden s und w sich ändern, wenn b sich a nähert, und s und w werden Functionen einer Variabeln sein, als welche man s selbst ansehen kann. Sieht man nun den Bogen ds so an, als ob er dem Krümmungskreise angehöre, dessen Halbmesser r ist, so ist $ds = r . w$, oder r bezeichnet den Grenzwerth des Bruches $\frac{s}{w}$. — Der Winkel w zwischen den beiden Tangenten (oder Normalen), welche den Endpunkten a und b des unendlich kleinen Bogens ds einer Curve zugehören, wird der *Contingenzwinkel* genannt.

Um also den Krümmungsradius einer Curve doppelter Krümmung zu finden, hat man nur den Winkel zwischen zwei unendlich nahen Tangenten zu berechnen und mit ihm in ds zu dividiren.

Nun ist, wenn zwei beliebige Linien mit den Axen die Winkel $\alpha\ \beta\ \gamma$ resp. $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$ und mit einander den Winkel u bilden, bekanntlich $\cos u = \cos\alpha . \cos\alpha_1 + \cos\beta . \cos\beta_1 + \cos\gamma . \cos\gamma_1$. Daraus folgt $1 - \cos u = 1 - \cos\alpha . \cos\alpha_1 - \cos\beta . \cos\beta_1 - \cos\gamma . \cos\gamma_1$, folglich, wenn man beide Seiten mit 2 multiplicirt und statt der 2 auf der rechten Seite die äquivalente Summe

$$(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) + (\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1)$$

schreibt: $2(1 - \cos u)$ oder

$$4\sin^2\frac{u}{2} = \overline{\cos\alpha_1 - \cos\alpha}^2 + \overline{\cos\beta_1 - \cos\beta}^2 + \overline{\cos\gamma_1 - \cos\gamma}^2 .$$

Sind nun die Linien, von denen gesprochen wird, zwei aufeinander folgende Linien in irgend einem Systeme, so wird $\angle u$ unendlich klein, folglich $4\sin^2\frac{u}{2}$ zu u^2 und die Differenzen

$$\cos\alpha_1 - \cos\alpha,\ \cos\beta_1 - \cos\beta,\ \cos\gamma_1 - \cos\gamma$$

werden resp. $d.\cos\alpha$, $d.\cos\beta$, $d.\cos\gamma$: unsre Formel geht also über in $u^2 = (d.\cos\alpha)^2 + (d.\cos\beta)^2 + (d.\cos\gamma)^2$. Ist endlich $\sphericalangle u$ der Contingenzwinkel w, so sind $\alpha\ \beta\ \gamma$ die Winkel der Tangente mit den drei Axen, d. h. $\cos\alpha = x'$ $\cos\beta = y'$ $\cos\gamma = z'$, und wir haben $w^2 = (dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2$, mithin wird endlich $\frac{ds}{w}$ oder $r = \frac{1}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}}$.

§ 15.

Eine andre Betrachtung, wahrscheinlich die einfachste, und durch die man zugleich die Grösse des Krümmungsradius, seine Richtung und die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes findet, ist folgende:

Man denke sich drei Punkte im Raume A, B, C, siehe Fig. 4, deren Coordinaten resp. sind $x\ y\ z$, $x_1\ y_1\ z_1$, $x_2\ y_2\ z_2$. Man lege durch sie eine Ebene und vervollständige das Parallelogramm, dessen vierte Ecke B' die Coordinaten $x_3\ y_3\ z_3$ habe. Alsdann sind die Coordinaten des Mittelpunktes f einerseits (weil $Af = fC$):
$\frac{x+x_2}{2}$ $\frac{y+y_2}{2}$ $\frac{z+z_2}{2}$, und andrerseits (weil $Bf = fB'$)

$$\frac{x_1+x_3}{2} \quad \frac{y_1+y_3}{2} \quad \frac{z_1+z_3}{2},$$

es müssen folglich die Gleichungen bestehen

$$x_3 = x - x_1 + x_2 \quad y_3 = y - y_1 + y_2 \quad z_3 = z - z_1 + z_2.$$

Demnach ist die Länge der Linie BB' durch die Gleichung gegeben

$$BB'^2 = \overline{x_3 - x_1}^2 + \overline{y_3 - y_1}^2 + \overline{z_3 - z_1}^2 = \overline{x - 2x_1 + x_2}^2 + \overline{y - 2y_1 + y_2}^2 + \overline{z - 2z_1 + z_2}^2$$

oder nach der gewöhnlichen Bezeichnung

$$BB'^2 = (\varDelta^2 x)^2 + (\varDelta^2 y)^2 + (\varDelta^2 z)^2.$$

Andrerseits ist aber, wenn man den Winkel BAB' mit w bezeichnet:

$$BB'^2 = AB^2 + AB'^2 - 2.\,AB.\,AB'\cos w$$

$$\text{oder} = (AB' - AB)^2 + AB'.\,AB.\left(2\sin\frac{w}{2}\right)^2.$$

Daraus folgt

$$\left(2\sin\frac{w}{2}\right)^2 = \frac{(\varDelta^2 x)^2 + (\varDelta^2 y)^2 + (\varDelta^2 z)^2 - (AB' - AB)^2}{AB'.AB}.$$

Will man diese Entwickelung benutzen, um den Krümmungsradius zu finden, so hat man die Punkte A, B, C als unendlich nahe Punkte einer Curve zu bestimmen. Dadurch wird $\sphericalangle BAB'$ oder w gleich dem Contingenzwinkel, denn dieser wird von BC und der Verlängerung von AB gebildet. Bedeutet ferner ε eine im Vergleich

zu AB unendlich kleine Grösse, so wird $AB' = BC = AB + \varepsilon$ oder wenn AB zu ds wird, so wird $AB'.AB = ds\,(ds + \varepsilon)$ oder

$$AB'.AB = ds^2 \text{ und } AB' - AB = ds + \varepsilon - ds = \varepsilon = d^2s;$$

man erhält also, da ausserdem $r = \frac{ds}{w}$ ist:

$$r = \frac{ds.\sqrt{ds^2}}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}},$$

denn $2 \sin \frac{w}{2}$ geht in w über. Nimmt man noch s als unabhängige Veränderliche an, so wird wiederum $r = \frac{1}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}}$.

§ 16.

Will man nun noch die Richtung von r haben, so nehme man $AB = BC$, siehe Fig. 5, oder s als unabhängige Veränderliche: dann ist die Richtung die Halbirungslinie des Winkels ABC. Nennen wir ferner die Länge des Krümmungsradius wieder r, und die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes α, β, γ, so finden wir für diese die Proportionen

$$\frac{\alpha - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{r}{BB'} = \frac{\beta - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{\gamma - z_1}{z_3 - z_1},$$

und hieraus

$$\alpha - x_1 = \frac{r\,(x_3 - x_1)}{BB'} = \frac{r.\,\Delta^2 x}{\sqrt{(\Delta^2 x)^2 + (\Delta^2 y)^2 + (\Delta^2 z)^2}}.$$

Es ist aber

$$r = \frac{(\Delta s)^2}{\sqrt{(\Delta^2 x)^2 + (\Delta^2 y)^2 + (\Delta^2 z)^2}},$$

folglich wenn wir diesen Werth in die letzte Gleichung einsetzen und zu den Grenzen übergehen:

$$\alpha - x_1 = x''.\,r^2; \text{ und ebenso } \beta - y_1 = y''.\,r^2,\ \gamma - z_1 = z''.\,r^2.$$

§ 17.

Endlich wollen wir noch folgende Ableitung anführen: Es ist zunächst für die ebenen Curven $r = \frac{ds}{w}$, oder da w unendlich klein ist $r = \frac{ds}{\sin w} = \frac{ds^3}{ds^2.\sin w}$. Nun ist aber $ds^2.\sin w$ der doppelte Inhalt eines gleichschenkligen Dreiecks, siehe Fig. 6, dessen Schenkel ds und dessen Aussenwinkel an der Spitze w ist. Diesen Inhalt findet man andrerseits auf folgende Weise:

Den doppelten Flächeninhalt eines beliebigen schiefwinkligen

Dreiecks findet man, wenn ein Scheitel der Anfangspunkt der Coordinaten ist und die andern beiden die Coordinaten $x_1\, y_1$ und $x_2\, y_2$ haben: $\pm(x_1\, y_2 - y_1\, x_2)$, siehe Fig. 7a; also wenn kein Scheitel des Dreiecks im Anfangspunkt liegt, siehe Fig. 7b, sondern die Coordinaten der Scheitel resp. $x\, y\; x_1\, y_1$ und $x_2\, y_2$ sind:

$$\pm\left(\overline{x_1 - x}.\overline{y_2 - y} - \overline{x_2 - x}.\overline{y_1 - y}\right)$$

oder

$$\pm\left\{(\varDelta x . (\varDelta^2 y + 2\varDelta y) - (\varDelta^2 x + 2\varDelta x)\varDelta y\right\} \text{ oder } \pm\left\{\varDelta x . \varDelta^2 y - \varDelta y . \varDelta^2 x\right\}.$$

Sind die Seiten unendlich klein, und besonders die beiden, welche einen Winkel $(\pi - w)$ bilden, um eine unendlich kleine Grösse einer höhern Ordnung verschieden, so wird der doppelte Inhalt

$$ds^2 . \sin w = dx . d^2 y - dy . d^2 x.$$

Es ist somit für ebene Curven

$$r = \frac{ds^3}{dx . d^2 y - dy . d^2 x} = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx . d^2 y - dy . d^2 x},$$

worin x und y als Functionen einer dritten Grösse t angesehen werden

Dies giebt sofort eine neue Ableitung für den Krümmungsradius im Raume; nur hat man hier ds^3 zu dividiren durch den doppelten Inhalt des Dreiecks im Raume. Den findet man, wenn man das Dreieck auf die drei Coordinatenebenen projicirt, und die Quadrate der Projectionen addirt:

$$(dx\, d^2 y - dy\, d^2 x)^2 + (dy\, d^2 z - dz\, d^2 y)^2 + (dz\, d^2 x - dx\, d^2 z)^2,$$

oder wie sich eine solche Summe dreier Quadrate schreiben lässt:

$$(dx^2 + dy^2 + dz^2)\,(d^2 x^2 + d^2 y^2 + d^2 z^2) - (dx\, d^2 x + dy\, d^2 y + dz\, d^2 z)^2$$

oder

$$ds^2\,(d^2 x^2 + d^2 y^2 + d^2 z^2) - (ds\, d^2 s)^2.$$

Demnach ist

$$r^2 = \frac{ds^6}{ds^2\,(d^2 x^2 + d^2 y^2 + d^2 z^2) - ds^2\, d^2 s^2} \text{ oder } r = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2 x)^2 + (d^2 y)^2 + (d^2 z)^2 - (d^2 s)^2}},$$

und wenn man s als unabhängige Veränderliche annimmt:

$$r = \frac{1}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}}.$$

§ 18.

Wir holen hier noch die Bedeutung einiger Formeln nach, die wir früher gehabt haben.

Sieht man in der Gleichung (2) des § 11. die Coordinaten $\alpha\,\beta\,\gamma$ als laufende an, so bedeutet diese Gleichung die Normalebene im Punkte $x\, y\, z$, wie aus der Gleichung dieser Ebene in § 7. hervorgeht. Da nun $\alpha\,\beta\,\gamma$ die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes

sind, so folgt hieraus: der Krümmungsmittelpunkt liegt immer in der betreffenden Normalebene der Curve.

Es ist evident, dass er nicht nur in dieser Normalebene, sondern auch in der des folgenden Elementes (und ausserdem in der Osculationsebene) liegen muss. Die beiden Normalebenen schneiden sich in einer Geraden, die normal steht auf der Osculationsebene, und ausser andern Namen auch den der Krümmungsaxe (axe de courbure) führt. Man findet ihre Gleichungen durch folgende Betrachtung: Die eine Normalebene entspricht einem gewissen Werthe t, die zweite einem Werthe $t + h$. Man hat folglich zur Bestimmung der Krümmungsaxe die Gleichungen dieser beiden Normalebenen, oder auch statt der zweiten die Differenz beider, durch das verschwindende h dividirt; d. h. die Gleichung (2) und ihre Differentialgleichung nach t oder die Gleichung (3) desselben § 11. Die Bedeutung der beiden Gleichungen (2) und (3) des § 11., zusammengenommen, ist also: die Krümmungsaxe für den Punkt xyz.

§ 19.

Wenn wir auch die Ausdrücke zur Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes bei Curven doppelter Krümmung ganz analog denen bei ebenen Curven hergeleitet haben, so besteht doch zwischen den Eigenschaften der Krümmungsmittelpunkte bei diesen Arten von Curven ein wesentlicher Unterschied.

Ist nämlich C irgend eine, ebene oder doppelt gekrümmte, gegebene Curve, dann bilden die Krümmungsmittelpunkte, die zu dieser Curve gehören, einen stetigen Zug, eine zweite Curve C_1. In der Ebene findet nun die merkwürdige Relation statt, dass jede Tangente von C_1, siehe Fig. 8, Normale im entsprechenden Punkte von C ist: dies ist von selbst klar. Sind nämlich ab, bc, cd, de vier auf einander folgende Elemente der Curve C, und $m\alpha$, $n\beta$, $p\gamma$, $q\delta$ die zugehörigen Normalen (die man sich in den Mitten jener vier als geradlinig angesehenen Elemente errichtet zu denken hat), so sind die Durchschnittspunkte je zweier aufeinanderfolgenden Normalen, nämlich α, β, γ Punkte der zugehörigen Curve C_1, denn sie sind die Krümmungsmittelpunkte für jene Elemente von C. Mithin sind $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ Elemente von C_1, und diese geraden Linien geben zugleich die Richtungen der zugehörigen Tangenten von C_1 an. Es ist also $\alpha\beta$ Tangente von C_1, zugleich ist es aber der Construction nach Normale an C. Und so die übrigen. (Statt der geradlinigen Elemente ab, bc, cd, de u. s. w. kann man sich, für unser Capitel noch angemessener, Kreisbögen denken; d. h. man kann jede Curve in

der Ebene C ansehen als zusammengesetzt aus einer unendlichen Anzahl unendlich kleiner Kreisbögen, die alle zu andern Radien und andern Mittelpunkten gehören, und diese Centren sind keine andern Punkte als die Punkte der Linie C_1, welche man bekanntlich die Abgewickelte oder Evolute der Curve C nennt.)

Im Raume fehlen gewisse von diesen Eigenschaften. Sind ab, bc, cd, de, siehe Fig. 9, aufeinanderfolgende Elemente einer Curve doppelter Krümmung, liegen also von ihnen nur je zwei anstossende in einer Ebene, so lege man, um den Krümmungsmittelpunkt für den Kreis, der durch a, b, c geht, zu finden, durch diese drei Punkte eine Ebene, und errichte in ihr auf den Linien ab und bc in ihren Mitten die Normalen, deren Schnittpunkt α der gesuchte Punkt ist. Ebenso findet man β als Krümmungsmittelpunkt für den Kreis, der durch b, c, d geht, und γ für den Kreis, der durch c, d, e geht etc. $n\alpha$, welches den Mittelpunkt α enthält, liegt also in der Ebene $a\,b\,c$, dagegen $n\beta$ mit dem zweiten Mittelpunkte β in einer wesentlich andern Ebene $b\,c\,d$; und zwar ist der Neigungswinkel $\alpha n \beta$ der der beiden Ebenen abc und bcd, denn $n\alpha$ und $n\beta$ sind in einem Punkte n des gemeinschaftlichen Durchschnitts bc beider Ebenen in beiden Ebenen normal errichtet. Die Ebene der beiden Normalen $n\alpha$ und $n\beta$ ist zugleich die zum Element bc gehörige Normalebene, denn sie enthält zwei, folglich alle Normalen von bc. Die Linie $\alpha\beta$ liegt also zwar in der Normalebene von bc, trifft aber dieses Element nicht. α und β sind aber zwei Punkte von C_1: und es folgt daher, dass bei Curven doppelter Krümmung eine Tangente an C_1 nicht Normale an C ist, denn sie trifft diese Curve nicht.

§. 20.

Zusatz. Der analytische Beweis dieser Behauptung ist länger und erfordert viel Rechnung. Ist xyz ein gegebener Punkt der Curve C und abc der entsprechende Krümmungsmittelpunkt, dann bestehen die drei Gleichungen

$$a = x + r^2 . x'' \quad b = y + r^2 . y'' \quad c = z + r^2 . z''.$$

ds ist das Bogenelement der Curve C. Hat man nun xyz und folglich auch r als Functionen von s gegeben, so sind auch $a\,b\,c$ hierdurch als Functionen von s aufgefasst. Bezeichnet man folglich die laufenden Coordinaten der Tangente an C_1 mit $\xi\ \eta\ \zeta$, so sind ihre Gleichungen (nach § 5.)

$$\frac{\xi - a}{\frac{da}{ds}} = \frac{\eta - b}{\frac{db}{ds}} = \frac{\zeta - c}{\frac{dc}{ds}}.$$

Setzt man nun in dieser Doppelgleichung für $\xi\eta\zeta$ die Coordinaten xyz des Punktes der Curve C ein, so wird die resultirende Gleichung $\frac{x-a}{\frac{da}{ds}} = \frac{y-b}{\frac{db}{ds}} = \frac{z-c}{\frac{dc}{ds}}$ falsch.

Anmerkung. Obgleich also im Raume die Curve C_1 nicht die Evolute C ist, so existiren dennoch auch für solche Curven Evoluten; man kann aus der Curve C andre Curven C_1 finden, durch deren Abwickelung C entsteht; ja es hat sogar jede Curve (auch die ebene) unzählig viele Evoluten, nur ist für die Curven von doppelter Krümmung die Curve der Krümmungsmittelpunkte nicht unter diesen Evoluten enthalten. Diese Entwickelung hängt indes von einem Punkte aus der Theorie der sogenannten abwickelbaren Flächen ab, zu denen wir erst später kommen.

4. Zweite Krümmung.

§ 21.

Wir gehen jetzt über zur zweiten Krümmung.

Erklärung. Unter erster Krümmung einer doppelt gekrümmten Curve versteht man den reciproken Werth des Krümmungsradius oder den Bruch $\frac{1}{r}$ oder $\frac{w}{ds}$, d. h. das Verhältnis des Winkels zweier unendlich nahen Tangenten zum zugehörigen Bogenelement. Demzufolge wird man als zweite Krümmung einer solchen Curve ansehen das Verhältnis des Winkels zweier unendlich nahen Osculationsebenen zum zugehörigen Bogenelement; dieses Verhältnis ergiebt die Abweichung der Osculationsebenen der Curve von einer und derselben Ebene. Zur Bestimmung dieser zweiten Krümmung gehen wir von der Gleichung der Osculationsebene aus.

Diese ist

$$(y'z''-z'y'')(\xi-x)+(z'x''-x'z'')(\eta-y)+(x'y''-y'x'')(\zeta-z)=0,$$

wo die Accente Differentiirung nach s bezeichnen. Daraus geht hervor, dass eine Linie, die auf dieser Ebene normal steht, mit den drei Axen Winkel $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$ bildet, für die wir die Gleichungen haben

$$\cos\alpha_1 = \frac{y'z''-z'y''}{\sqrt{(y'z''-z'y'')^2+(z'x''-x'z'')^2+(x'y''-y'x'')^2}},$$

oder da der Radicand im Nenner

$$=(x'^2+y'^2+z'^2)(x''^2+y''^2+z''^2)-(x'x''+y'y''+z'z'')^2$$

$$\text{d. i.} = x''^2+y''^2+z''^2 \text{ ist:}$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{y'z''-z'y''}{\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}}$$

oder der Kürze halber:

$\cos \alpha_1 = r(y'z'' - z'y''),\ \cos \beta_1 = r(z'x'' - x'z''),\ \cos \gamma_1 = r(x'y'' - y'x'').$

Die benachbarte Osculationsebene ergiebt eine zweite Normale, für welche $\cos \alpha_1$ $\cos \beta_1$ $\cos \gamma_1$ ähnlich gebildete Werthe haben, die dem folgenden Punkte der Curve entsprechen. Nun ist der Winkel zwischen den beiden Osculationsebenen gleich dem Winkel zwischen den beiden Normalen, d. h. (nach §. 14.) gleich

$$\sqrt{(d.\cos \alpha_1)^2 + (d.\cos \beta_1)^2 + (d.\cos \gamma_1)^2}.$$

Das Mass der zweiten Krümmung ist folglich dieser Winkel W dividirt durch ds, also $\frac{W}{ds}$.

Nun ist $\frac{d.\cos \alpha_1}{ds} = r(y'z''' - z'y''') - r^3(y'z'' - z'y'')(x''x''' + y''y''' + z''z''')$
$= r^3 \left\{(x''^2 + y''^2 + z''^2)(y'z''' - z'y''') - (y'z'' - z'y'')(x''x''' + y''y''' + z''z''')\right\}.$

Bezeichnen wir nun die Determinante $\begin{vmatrix} x' & x'' & x''' \\ y' & y'' & y''' \\ z' & z'' & z''' \end{vmatrix}$ mit $\varDelta$, was wir auch so schreiben können

$$x'''.(y'z'' - z'y'') + y'''.(z'x'' - x'z'') + z'''.(x'y'' - y'x'') = \varDelta,$$

so wird

$$\begin{aligned}(\cos \alpha_1)' = r^3 \Big\{ & x'' \{x''y'z''' - \underbrace{x''z'y''' - x'''y'z''}_{-\varDelta + x'y''z''' - x'y'''z''} + x'''z'y''\} \\ & + y'' \{y'y''z''' - \underbrace{y''y'''z' - y'y'''z''}_{y'(y''z''' - y'''z'')} + z'y''y'''\} \\ & + z'' \{z''z'''y' - \underbrace{z'z''y''' - y'z''z'''}_{z'(y''z''' - z''y''')} + z'z'''y''\}\Big\} \\ = r^3 \Big\{ & -x''\varDelta + x'x''(y''z''' - z''y''') \\ & + y'y''(y''z''' - y'''z'') + z'z''(y''z''' - z''y''')\Big\} \\ = r^3 \Big\{ & -x''\varDelta + \underbrace{(x'x'' + y'y'' + z'z'')}_{0}(y''z''' - y'''z'')\Big\},\end{aligned}$$

also

$(\cos \alpha_1)' = -r^3 x'' \varDelta$; ebenso $(\cos \beta_1)' = -r^3 y'' \varDelta$ und $(\cos \gamma_1)' = -r^3 z'' \varDelta$.

Es wird also die zweite Krümmung $= \sqrt{r^6 \varDelta^2 (x''^2 + y''^2 + z''^2)} = \sqrt{r^4 \varDelta^2}$, oder, wenn wir sie mit $\frac{1}{R}$ bezeichnen, und statt r seinen Werth zurücksetzen: $\frac{1}{R} = \frac{\varDelta}{x''^2 + y''^2 + z''^2}$.

§ 22.

Lehrsatz 1. Verschwindet die erste Krümmung, so ist die Curve eine Gerade.

Die erste Krümmung $\frac{1}{r} = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}$ kann nur dadurch gleich Null werden, dass die drei Gleichungen bestehen:

$$x'' = 0 \quad y'' = 0 \quad z'' = 0.$$

Diese kann man sofort integriren: $x' = c \quad y' = c_1 \quad z' = c_2$, wobei die sonst willkürlichen Constanten $c \; c_1 \; c_2$ nur der Gleichung

$$c^2 + c_1{}^2 + c_2{}^2 = 1$$

unterworfen sind. Die letzten drei Gleichungen integrirt geben wiederum $x = cs + d \quad y = c_1 s + d_1 \quad z = c_2 s + d_2$ oder in folgender Form geschrieben $\frac{x-d}{c} = \frac{y-d_1}{c_1} = \frac{z-d_2}{c_2}$. Dies sind aber die Gleichungen einer Geraden.

Lehrsatz 2. Verschwindet die zweite Krümmung, so ist die Curve eine ebene.

$\frac{1}{R} = 0$ giebt nothwendig $\Delta = 0$. Da wir nun gefunden haben:

$$\{r.(y'z'' - z'y'')\}' = -r^3 x'' \Delta$$

so muss $r.(y'z'' - z'y'') = c$ und ebenso $r.(z'x'' - x'z'') = c_1$ und $r.(x'y'' - y'x'') = c_2$ sein.

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit $x' \; y' \; z$ und addirt, so wird die linke Seite

$$r.\{x'y'z'' - x'y''z' + x''y'z' - x'y'z'' + x'y''z' - x''y'z'\}$$ oder Null,

und wir erhalten folgende Gleichung $0 = cx' + c_1 y' + c_2 z'$, und daraus folgt wiederum $cx + c_1 y + c_2 z = c_3$. Dies ist aber die Gleichung einer Ebene. Sämmtliche Punkte der durch die Gleichung $\frac{1}{R} = 0$ definirten Curve genügen also der Gleichung einer Ebene, oder mit andern Worten: Sämmtliche Punkte der Curve liegen in einer Ebene, die Curve ist eben.

5. Schmiegungskugel.

§ 23.

Erklärung. Eine Kugel, die durch einen Punkt einer Curve doppelter Krümmung und drei diesem Punkte unendlich nahe Punkte hindurchgeht, heisst die Schmiegungskugel jenes Punktes.

Aufgabe. Die Schmiegungskugel eines Punktes, d. h. ihren Radius und die Coordinaten ihres Mittelpunktes, zu bestimmen.

Bezeichnen $\xi\,\eta\,\zeta$ die Coordinaten des Mittelpunktes und ϱ den Radius der Kugel, so ergeben sich nach § 9. zur Bestimmung dieser vier Grössen folgende vier Gleichungen:

$$(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2=\varrho^2,\ (\xi-x)x'+(\eta-y)y'+(\zeta-z)z'=0,$$
$$(\xi-x)x''+(\eta-y)y''+(\zeta-z)z''=1$$

und
$$(\xi-x)x'''+(\eta-y)y'''+(\zeta-z)z'''=0,$$

wobei in Beziehung auf die Differentialquotienten s als unabhängige Variable gilt. Setzen wir der Kürze halber

$$z'y'''-y'z'''=a\quad x'z'''-z'x'''=b\quad y'x'''-x'y'''=c,$$

so ergeben die zweite und vierte dieser Gleichungen:

$$\xi-x:\eta-y:\zeta-z=a:b:c$$

oder
$$\xi-x=\mu.a,\quad \eta-y=\mu.b,\quad \zeta-z=\mu.c,$$

wo μ ein Factor ist, der aus der dritten Gleichung bestimmt wird: $\mu\,(a.x''+b.y''+c.z'')=1$, oder, da

$$a\,x''+b.y''+c.z''=\begin{vmatrix} x'' & x''' & x' \\ y'' & y''' & y' \\ z'' & z''' & z' \end{vmatrix}=\Delta\ (\S\ 21.)\ \text{ist:}\ \mu=\frac{1}{\Delta}\cdot$$

Danach wird $\quad \xi-x=\frac{a}{\Delta}\quad \eta-y=\frac{b}{\Delta}\quad \zeta-z=\frac{c}{\Delta}\cdot$

Jetzt findet man aus der ersten Gleichung $\varrho^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{\Delta^2}\cdot$

Es ist aber

$$a^2+b^2+c^2=(x'^2+y'^2+z'^2)(x'''^2+y'''^2+z'''^2)-(x'x'''+y'y'''+z'z''')^2.$$

Wir haben nun die Gleichungen: $x'^2+y'^2+z'^2=1$, und daraus folgend $x'x''+y'y''+z'z''=0$ und $x'x'''+y'y'''+z'z'''=-(x''^2+y''^2+z''^2)$. Folglich wird $a^2+b^2+c^2=x'''^2+y'''^2+z'''^2-(x''^2+y''^2+z''^2)^2$.

Setzen wir also statt a, b, c ihre Werthe zurück, und für $a^2+b^2+c^2$ den eben gefundenen, so erhalten wir als Lösung der Aufgabe:

$$\xi-x=\frac{z'y'''-y'z'''}{\Delta}\quad \eta-y=\frac{x'z'''-z'x'''}{\Delta}\quad \zeta-z=\frac{y'x'''-x'y'''}{\Delta}$$

$$\varrho=\frac{1}{\Delta}\sqrt{x'''^2+y'''^2+z'''^2-(x''^2+y''^2+z''^2)^2}.$$

Bemerkung. Es bleibt uns von der Theorie der Curven im Raume im Allgemeinen und insbesondere der Curven doppelter Krümmung zwar noch manches übrig. Dies können wir jedoch erst abhandeln, wenn wir von der Theorie der Flächen gesprochen haben, wozu wir jetzt übergehen.

Zweiter Abschnitt: Flächen und Curven auf den Flächen.

1. Analytischer Ausdruck der Flächen.

§ 24.

Auch hier beschäftigen wir uns zunächst mit der Festsetzung des analytischen Ausdrucks für die Flächen, das weiter ausführend, was wir bereits in § 4. angedeutet haben. Es giebt im Wesentlichen drei verschiedene Weisen eine Fläche analytisch darzustellen.

Man giebt entweder eine Coordinate als Function der beiden andern: $z = \varphi(x, y)$. Oder man giebt zweitens überhaupt nur eine Gleichung zwischen $x\, y\, z$ in dieser Form: $F(x, y, z) = 0$; dies zweite ist das gewöhnlichere, und es ist passend, alle Formeln so einzurichten, dass auf diese Form der Gleichung der Fläche Rücksicht genommen wird. Die erste Darstellungsart ist zwar ebenso allgemein, setzt aber voraus, dass man z aus der zweiten Gleichung explicite dargestellt habe, was einmal nicht immer möglich ist und zweitens eine nur selten vorkommende Art wie sich die Gleichung einer Fläche aus einer mathematischen Aufgabe ergiebt. Die dritte Form endlich, die von der grössten Wichtigkeit ist, ist folgende: Man denkt sich $x\, y\, z$ als Functionen zweier neuer Variabeln

$$x = f_1(p, q) \quad y = f_2(p, q) \quad z = f_3(p, q).$$

Mit dieser letzten Form des Ausdrucks hängen die beiden ersten auf eine leicht kenntliche Weise zusammen. Eliminirt man nämlich aus den drei Gleichungen der letzten Form die beiden Variabeln p und q, so erhält man die zweite; und die erste ist selbst nur ein specieller Fall der dritten, denn man kann sie in folgende Gestalt bringen: $x = p \quad y = q \quad z = \varphi(p, q)$.

Ein Beispiel zu der dritten Art der Darstellung bietet die Kugel, siehe Fig. 10, in der wir den Aequator als Ebene der xy und dessen Axe als z Axe annehmen, und zwar möge die positive x Axe durch den Null-Meridian gehen. Denken wir uns alsdann jeden Punkt auf der Kugel bestimmt durch seine geographische Länge p und seine geographische Breite q, so ist bekanntlich, wenn wir durch den fraglichen Punkt C und die z Axe einen grössten Kreis gelegt denken, das Stück dieses Meridians von C bis zum Aequator $= q$ und das Stück des Aequators von da bis zum Null-Meridian $= p$. Wir haben also in diesem Falle sphärische Coordinaten p und q. Construirt man sich die orthogonalen, so ist offenbar $z = a \sin q$,

wenn a der Kugelradius ist, und da die Projection des hier in Betracht kommenden Kugelradius auf die Ebene der xy, nämlich $a.\cos q$, mit der xAxe den Winkel p bildet, so ist zweitens $x = a \cos q . \cos p$ und drittens $y = a \cos q . \sin p$. — Für die unabhängigen Variabeln p und q besteht hier blos die Bedingung, dass die geographische Länge p von 0^0 bis 360^0 alle Werthe durchlaufen kann, während die geographische Breite q nur die Werthe von -90^0 (durch 0^0) bis $+90^0$ annehmen kann, indem man die südliche Breite negativ rechnet: durch diese Bestimmung bezweckt man, dass alle Punkte der Kugel in den Gleichungen enthalten seien, und zwar alle nur eindeutig.

Man sieht leicht, wie man aus dieser Form der Gleichung der Kugel die zweite erhalten kann: Quadrirt und addirt man die Gleichungen, die für die drei orthogonalen Coordinaten $x\,y\,z$ bestehen, so werden p und q eliminirt, und man erhält die bekannte Gleichung der Kugel: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Hätte man die Gleichung eines dreiaxigen Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

in der dritten Form darzustellen, so könnte man z. B. setzen

$$x = a \cos p \cos q \quad y = b \sin p \cos q \quad z = c \sin q.$$

§ 25.

Die dritte Form des analytischen Ausdrucks der Fläche hat eine sehr einfache geometrische Bedeutung. Betrachtet man nämlich die Fläche gegeben durch das System der drei Gleichungen

$$x = f_1(p, q) \quad y = f_2(p, q) \quad z = f_3(p, q),$$

so findet man für jedes Werthepaar, welches man den unabhängigen Veränderlichen p und q beilegt, und wenn man $x\,y\,z$ nach ihren Gleichungen berechnet, einen bestimmten Punkt der Fläche. Legt man aber dem p einen numerischen Werth bei und lässt ihn für alle Werthe, die man q giebt, constant, so wird dadurch das System der gegebenen drei Gleichungen in ein System dreier Gleichungen verwandelt, die nicht mehr zwei Unabhängige enthalten, sondern eine: ein solches System ist aber (§ 3.) der analytische Ausdruck einer Curve im Raume, welche überdies nothwendig auf der Fläche liegt. Die Gleichung $p = c$, zu den obigen drei hinzugefügt, drückt also eine gewisse Curve auf der Fläche aus. Lässt man aber p eine sogenannte variable Constante, einen Parameter sein, so bekommt man für jeden Werth desselben eine solche Curve auf der Fläche, der Inbegriff aller Werthe von p bedingt also ein System von Curven,

von denen eine jede ganz auf der Fläche liegt, und welche die ganze Fläche überziehen.

Legt man ebenso dem q einen constanten Werth bei, dass also nur p variabel bleibt, so bekommt man ebenfalls eine Curve auf der Fläche, und lässt man q Parameter sein, so ergiebt der Inbegriff aller Werthe desselben alle Curven, welche dieser ersten analog sind.

Hieraus schliessen wir: die dritte, d. h. diejenige Darstellungsart einer Fläche, nach welcher man ihre Coordinaten als Functionen zweier neuen unabhängigen Variabeln bestimmt, besteht darin, dass man sich die ganze Fläche durch zwei Systeme von Curven überzogen denkt. Das eine System entspricht der Gleichung $p = c$, das andere System von Curven entspricht der Gleichung $q = c_1$. Jeder Punkt der Fläche wird alsdann betrachtet als gegeben als Durchschnittspunkt einer Curve des einen Systems und einer Curve des andern Systems.

Wenden wir dies auf das oben gewählte Beispiel der Kugel an, so finden wir zunächst, dass alle Punkte, für welche p einen constanten Werth hat, auf demselben Meridian liegen, oder dass die Gleichung $p = c$ auf der Kugel einen Meridian ausdrückt. Ebenso sieht man, dass die Gleichung $q = c_1$ einen Parallelkreis bedeutet. Will man also nach der oben gewählten Methode einen Punkt der Kugel angeben, so giebt man sein p und sein q, und damit resp. seinen Meridian und seinen Parallelkreis. Als den Durchschnitt dieser beiden für jeden Punkt (unter der Bedingung der in § 24. angegebenen Einschränkung für p und q) bestimmten Kreise sieht man den Punkt an; d. h. man betrachtet ihn als Durchschnitt zweier Curven, von welchen die eine zu dem Systeme gehört, dessen Gleichung ist $p =$ constans, und die andere zu dem Systeme, dessen Gleichung ist $q =$ constans.

§ 26.

Anmerkung. Etwas Aehnliches ist schon die Coordinaten-Methode in der Ebene. Mit dem Ausdrucke: Einführung rechtwinkliger Coordinaten will man bezeichnen, dass man sich die ganze Ebene mit zwei auf einander normalen Systemen paralleler Linien überzogen denkt, und jeden Punkt als Durchschnitt einer Geraden des einen Systems in eine des andern Systems giebt. Aehnlich ist es bei schiefwinkligen und Polarcoordinaten, nur dass bei den erstern die beiden Systeme gerader Linien unter irgend einem schiefen Winkel gegen einander geneigt sind, und bei den andern nur das eine System geradlinig, nämlich ein ebenes Strahlenbüschel mit dem Anfangs-

punkt der Polarcoordinaten als Mittelpunkt, das andere dagegen eine Schaar concentrischer Kreise ist.

Ja selbst die erste analytische Art, eine Fläche darzustellen, hat ganz die analoge Bedeutung, was schon daraus hervorgeht, dass sie nur ein specieller Fall der dritten ist. Schreibt man nämlich die Gleichung $z = \varphi(x, y)$ so: $x = p \quad y = q \quad z = \varphi(p, q)$, so giebt die erste Gleichung $x = p$ eine ebene Curve parallel der Ebene der yz, und alle diejenigen Punkte, für welche $y = q$ ist, liegen in einer ebenen Curve, die parallel der xz Ebene ist. Die erste Darstellungsart der Flächen bedeutet also, dass man sich die Fläche überzieht mit solchen ebenen Curven, die entweder der xz Ebene oder der yz Ebene parallel sind, und die Punkte der Fläche giebt als Durchschnitte je zweier Curven dieser Systeme.

§ 27.

Lehrsatz. Jede Gleichung zwischen den beiden unabhängigen Variabeln p und q der drei Gleichungen einer Fläche giebt eine Curve auf der Fläche.

Denn fügt man zu den drei Gleichungen

$$x = f_1(p, q) \quad y = f_2(p, q) \quad z = f_3(p, q)$$

noch eine Gleichung $\Theta(p, q) = 0$, so kann man offenbar mittelst derselben eine der beiden Unabhängigen p oder q aus den ersten drei eliminiren, so dass drei Gleichungen übrig bleiben, welche nur eine Unabhängige enthalten, und dies ist der analytische Ausdruck einer Curve im Raume, und zwar einer Curve, die auf der gegebenen Fläche liegt, weil alle ihre Punkte den Gleichungen der Fläche genügen.

Bei dem Beispiel der Schraubenlinie hatten wir etwas Aehnliches, indem wir sie definirten als auf der Schraubenfläche liegend. (§ 4.) Für unser letztes Beispiel der Kugel ergiebt sich, dass man eine Curve auf derselben offenbar am einfachsten darstellen wird, indem man ein Mittel angiebt, um aus der geographischen Länge eines Punktes dieser Curve die geographische Breite und umgekehrt zu finden. In diesem Beispiele bezeichnet also jede Gleichung zwischen p und q eine sphärische Curve.

A. Die Gleichung der Fläche sei gegeben in der Form (2) oder (1) (§ 24).

2. Untersuchung der Flächen mittelst schneidender Ebenen.

§ 28.

Nachdem wir uns klar gemacht haben, wie wir eine Fläche in Gleichung setzen müssen, gehen wir über zur Untersuchung der Flächen, und zu diesem Zwecke denken wir uns die Fläche zunächst gegeben durch die Form $F(x, y, z) = 0$, weil es so am einfachsten ist.

Ein Hauptmittel, um die Gestalt einer Fläche kennen zu lernen, besteht darin, dass man ebene Schnitte legt, und diese untersucht. Von allen diesen ebenen Schnitten sind diejenigen am leichtesten zu discutiren und zu berechnen, welche in den drei Coordinatenebenen liegen. Will man nämlich den Schnitt einer Fläche mit der xy Ebene untersuchen, so hat man nur in der Gleichung der Fläche $z = 0$ zu setzen: dadurch erhält man unmittelbar die Curve, in welcher die Fläche die xy Ebene schneidet; und ebenso ist es mit den beiden andern Coordinatenebenen. Hat man dagegen nicht gerade den Schnitt einer Coordinatenebene, sondern irgend einer andern Ebene zu discutiren, so wird es am einfachsten sein, diese andere Ebene zur Coordinatenebene zu machen. Dies hat zwar mitunter einige Rechnungs-Längen aber keine Rechnungs-Schwierigkeiten.

Von vornherein wollen wir annehmen, dass die schneidende Ebene durch den Anfangspunkt geht. Ist dies nicht der Fall, so hat man nur die alten Coordinaten, jede um eine constante Grösse zu vermindern und zwar um die entsprechende Coordinate des neuen Anfangspunktes bezogen auf die alten Axen. Wir haben jetzt also folgende Aufgabe zu lösen: Den Durchschnitt einer gegebenen Fläche $F(x, y, z) = 0$ und einer Ebene zu bestimmen, die durch den Anfangspunkt geht. Und zu dem Zwecke verlegen wir die Coordinatenaxen, so zwar, dass sie unter einander dieselben rechten Winkel bilden wie wir sie für das ursprüngliche System annehmen, dass aber jede Axe des neuen Systems mit der ihr im alten Systeme entsprechenden einen gegebenen Winkel macht.

Die alten Coordinaten seien $x\ y\ z$. Wir wählen zunächst denjenigen Quadranten der xy Ebene zum positiven, siehe Fig. 11a, in welchen der Durchschnitt der schneidenden Ebene (die durch denselben Anfangspunkt geht) mit der xy Ebene zum Theil hineinfällt. Der Winkel beider Ebenen sei i, der Winkel, den der angeführte Durchschnitt mit der alten y Axe macht, gleich h. Lassen wir zu-

nächst die z Axe und folglich auch die xy Ebene unverändert, siehe Fig. 11 b, und drehen in dieser nur das Axenkreuz der y und x in der Richtung von y nach x um den Winkel h, so sind die Coordinaten des alten Systems durch die Coordinaten des jetzt entstandenen, die wir resp. mit $x' y' z$ bezeichnen wollen, in folgenden Gleichungen gegeben:

$$x = y' \sin h + x' \cos h \quad y = y' \cos h - x' \sin h \quad z = z.$$

Jetzt lassen wir die y' Axe unverändert, und drehen nur in der xz Ebene in der Richtung von der x' Axe nach der z Axe das Axenkreuz der x' und z um einen Winkel i: alsdann ist die neue Ebene der x und y die gegebene schneidende Ebene. Die Coordinaten des durch die erste Drehung entstandenen Systems sind nun durch die Coordinaten $x'' y' z'$ des jetzt entstandenen so gegeben:

$$x' = x'' \cos i - z' \sin i \quad y' = y' \quad z = x'' \sin i + z' \cos i.$$

Man hat folglich endlich die Coordinaten des ersten Systems gegeben durch die des letzten:

$$x = y' \sin h + x'' \cos i \cos h - z' \sin i \cos h \quad y = y' \cos h - x'' \cos i \sin h + z' \sin i \sin h$$
$$z = x'' \sin i + z' \cos i.$$

Setzt man nun diese Ausdrücke in die Gleichung der Fläche (nachdem man diese nöthigenfalls so bestimmt hat, dass die schneidende Ebene durch den Anfangspunkt geht) ein, und dann $z' = 0$, so erhält man die Gleichung der Schnittcurve in rechtwinkligen Coordinaten y', x''. Wir können also sagen: die gegebene Ebene schneidet aus der Fläche $F(x, y, z) = 0$ die Curve

$$F\left\{Y \sin h + X \cos i \cos h,\ Y \cos h - X \cos i \sin h,\ X \sin i\right\} = 0 \text{ aus.}$$

§ 29.

In vielen Fällen jedoch und namentlich wenn man die Eigenschaften der Coefficienten, welche in den allgemeinen Formeln für die Transformation der Coordinaten im Raume vorkommen, entwickelt hat, ist es einfacher und symmetrischer, sich dieser Winkel i und h gar nicht zu bedienen, sondern unmittelbar die allgemeinen Transformationsformeln anzuwenden.

Bleibt der Anfangspunkt der Coordinaten derselbe, so hat man zur Transformation eines rechtwinkligen Coordinatensystems in ein anderes folgende Formeln:

$$x' = x . \cos(x', x) + y . \cos(x', y) + z . \cos(x', z);$$
$$y' = x . \cos(y', x) + y . \cos(y', y) + z . \cos(y', z);$$
$$z' = x . \cos(z', x) + y . \cos(z', y) + z . \cos(z', z),$$

welche wir abgekürzt so schreiben wollen:

$$x' = \alpha x + \beta y + \gamma z; \quad y' = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z; \quad z' = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z.$$

Zwischen den neuen Transformationscoefficienten bestehen nun viele Beziehungen, da sie sich auf drei Grössen sämmtlich zurückführen lassen. Es ist zunächst die Entfernung eines Punktes vom Anfangspunkte im alten Systeme $x^2+y^2+z^2$, im neuen $x'^2+y'^2+z'^2$, und da Punkt und Anfangspunkt unverändert bleiben, so müssen diese beiden Entfernungen einander gleich, d. h. $x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2$ sein. Dies ist aber unter allen Umständen nur möglich durch folgende sechs Gleichungen:

$$(1)\ \alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2=1 \quad (2)\ \beta^2+\beta'^2+\beta''^2=1 \quad (3)\ \gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=1$$

$$(4)\ \beta\gamma+\beta'\gamma'+\beta''\gamma''=0 \quad (5)\ \gamma\alpha+\gamma'\alpha'+\gamma''\alpha''=0 \quad (6)\ \alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta''=0.$$

Von diesen sechs Gleichungen ausgehend kann man eine grosse Anzahl andrer Relationen finden. Zu dem Ende betrachten wir die Gleichungen (1) (6) (5). Diese kann man in einem gewissen Sinne zu linearen machen in Bezug auf $\alpha\,\alpha'\alpha''$, wenn man sie so schreibt:

$$\alpha\alpha+\alpha'\alpha'+\alpha''\alpha''=1 \quad \beta\alpha+\beta'\alpha'+\beta''\alpha''=0 \quad \gamma\alpha+\gamma'\alpha'+\gamma''\alpha''=0.$$

Dann kann man hieraus nach Art der Gleichungen ersten Grades $\alpha'\ \beta'\ \gamma'$ zwar nicht finden aber doch darstellen: Multiplicirt man nämlich die drei Gleichungen resp. mit $\beta'\gamma''-\gamma'\beta''\ \ \gamma'\alpha''-\alpha'\gamma''\ \ \alpha'\beta''-\beta'\alpha''$ und addirt sie, so erhält man

$$\Big\{\alpha\left\{\beta'\gamma''-\gamma'\beta''\right\}+\alpha'\left\{\beta''\gamma-\beta\gamma''\right\}+\alpha''\left\{\gamma'\beta-\beta'\gamma\right\}\Big\}\alpha \text{ oder } \alpha\begin{vmatrix}\alpha & \alpha' & \alpha''\\ \beta & \beta' & \beta''\\ \gamma & \gamma' & \gamma''\end{vmatrix}$$

oder $\alpha.\varDelta=\beta'\gamma''-\gamma'\beta''$. Ganz ebenso findet man aus denselben Gleichungen durch Multiplication mit entsprechend geänderten Factoren ähnliche Ausdrücke für $\alpha'\varDelta$ und $\alpha''\varDelta$, denn die Grösse $\varDelta$ ändert sich nicht, wenn man die Accente cyklisch fortrücken lässt. Da diese Grösse sich auch nicht ändert, wenn man die Buchstaben $\alpha\,\beta\,\gamma$ cyklisch fortrückt, so findet man analoge Ausdrücke für $\beta\varDelta$, $\beta'\varDelta$, $\beta''\varDelta$ aus den Gleichungen (2) (6) (4) und endlich für $\gamma\varDelta$, $\gamma'\varDelta$, $\gamma''\varDelta$ aus den Gleichungen (3) (5) (4). Man hat also, wenn man die letzten neun Gleichungen zusammenstellt, folgende Beziehungen:

$$(7)\ \alpha.\varDelta=\beta'\gamma''-\gamma'\beta'', \quad (8)\ \alpha'.\varDelta=\beta''\gamma-\gamma''\beta, \quad (9)\ \alpha''.\varDelta=\beta\gamma'-\gamma\beta';$$

$$(10)\ \beta.\varDelta=\gamma'\alpha''-\alpha'\gamma'', \quad (11)\ \beta'.\varDelta=\gamma''\alpha-\alpha''\gamma, \quad (12)\ \beta''.\varDelta=\gamma\alpha'-\alpha\gamma';$$

$$(13)\ \gamma.\varDelta=\alpha'\beta''-\beta'\alpha'', \quad (14)\ \gamma'.\varDelta=\alpha''\beta-\beta''\alpha, \quad (15)\ \gamma''.\varDelta=\alpha\beta'-\beta\alpha'.$$

Hieraus kann man wiederum noch andere Gleichungen ableiten. Wenn man die Gleichungen (7) (10) (13) der Reihe nach mit $\alpha\,\beta\,\gamma$ multiplicirt und addirt, so erhält man $\varDelta\,(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=\varDelta$ d er, da, wie gleich gezeigt werden soll, $\varDelta$ wesentlich von Null verschieden ist:

$$(16)\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1 \text{ und ebenso } (17)\ \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2=1$$

und (18) $\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1$,

entsprechend den Gleichungen (1) bis (3).

Wenn man aber (9) (12) (15) mit $\alpha'\ \beta'\ \gamma'$ multiplicirt und addirt, so erhält man $(\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'')\varDelta = 0$, oder:

(19) $\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0$ und ebenso (20) $\alpha''\alpha + \beta''\beta + \gamma''\gamma = 0$

und (21) $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0$,

entsprechend den Gleichungen (4) bis (6). Alle diese Gleichungen von der siebenten an sind also aus den 6 ersten, die wir vermittelst der Geometrie gefunden haben, durch Rechnung hervorgegangen, obgleich wir auch sie mit Hilfe geometrischer Betrachtungen hätten finden können. Andere Gleichungen, die man durch beliebige andere Combinationen der bereits aufgestellten herleiten könnte, lassen wir unerwähnt.

§ 30.

Was nun die Grösse $\varDelta$ betrifft, so lässt sie sich leicht bestimmen. Wenn man nämlich die Gleichungen (7) (8) (9) des vorigen Paragraphen quadrirt und addirt, so erhält man:

$$(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2)\varDelta^2 = (\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'')^2 + (\beta''\gamma - \gamma''\beta)^2 + (\beta\gamma' - \gamma\beta')^2$$

oder

$$\varDelta^2 = (\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2)(\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2) - (\beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'')^2 \text{ d. i. } \varDelta^2 = 1,$$

und hieraus (22) ...... $\varDelta = \pm 1$. Hiernach können wir auch die Gleichungen (7) bis (15), wenn wir die obern Zeichen zusammen und die untern Zeichen zusammen gelten lassen, mit Anwendung partieller Differentialquotienten so schreiben:

$$\pm\alpha = \frac{\partial\varDelta}{\partial\alpha},\ \pm\alpha' = \frac{\partial\varDelta}{\partial\alpha'},\ \pm\alpha'' = \frac{\partial\varDelta}{\partial\alpha''};$$

$$\pm\beta = \frac{\partial\varDelta}{\partial\beta},\ \pm\beta' = \frac{\partial\varDelta}{\partial\beta'},\ \pm\beta'' = \frac{\partial\varDelta}{\partial\beta''};$$

$$\pm\gamma = \frac{\partial\varDelta}{\partial\gamma},\ \pm\gamma' = \frac{\partial\varDelta}{\partial\gamma'},\ \pm\gamma'' = \frac{\partial\varDelta}{\partial\gamma''}.$$

Es lässt sich aber auch bestimmen, in welchem Falle $\varDelta = +1$ und in welchem es $= -1$ ist. Zu dem Ende schicken wir folgende Betrachtung voraus:

Denken wir uns ein rechtwinkliges Coordinatensystem, so kann, wenn einmal die xy Ebene auch in Beziehung auf das Vorzeichen ihrer Coordinaten bestimmt ist, die positive z Axe selbstverständlich nur zwei verschiedene Lagen haben: entweder oberhalb oder unterhalb dieser Coordinatenebene. Bestimmen wir nun den Cyklus der Aufeinanderfolge der Axen so, dass auf die x Axe die der y und auf diese die der z folgt, welche also wiederum die der x hinter sich hat, so ergiebt sich leicht Folgendes:

Stellen wir uns bei der ersten Lage der z Axe (oberhalb der xy Ebene) in die x Axe so, dass unsre Füsse auf der yz Ebene stehen und der Kopf in der x Axe liegt, siehe Fig. 12a, so erfolgt die Drehung von der y- zur z Axe von links nach rechts. Stellen wir uns jetzt ebenso in die y Axe, und sehen die Drehung von der z- nach der x Axe, so erfolgt diese in derselben Richtung, und ebenso verhält sich zu uns die Drehung von der x- nach der y Axe, wenn wir in der z Axe stehen. In diesem ersten Systeme geht also die angegebene Drehung von einer Axe zur folgenden, wenn man sich in die dritte Axe gestellt denkt, überall von links nach rechts. — Im zweiten System dagegen ist, wenn sonst sich nichts ändert als eben nur die Lage der z Axe, siehe Fig. 12b, die Drehung überall umgekehrt, nämlich von rechts nach links.

Wir wollen hiernach zwei Coordinatensysteme gleichstimmig nennen, wenn bei gleicher Aufeinanderfolge der Axen die Drehung entweder in beiden von links nach rechts oder in beiden von rechts nach links geschieht. Dagegen nennen wir zwei Coordinatensysteme ungleichstimmig, wenn die Drehungsrichtung in dem einen Systeme die entgegengesetzte der andern ist. — Hiernach beweisen wir folgenden

Lehrsatz: Wenn das neue Coordinatensystem mit dem gegebenen gleichstimmig ist, so ist $\Delta = +1$; wenn sie nicht gleichstimmig sind, so ist $\Delta = -1$.

Beweis: Sind die beiden Systeme wiederum $x\,y\,z$ und $x'y'z'$, immer mit demselben Anfangspunkt, aber sonst ganz beliebig gegen einander liegend, so wollen wir uns das erste fest denken und das zweite um den festen Anfangspunkt drehen. Dann sind offenbar die 9 Transformationscoefficienten bei jeder neuen Lage des neuen Systems andere als bei jeder andern Lage, und zwar so, dass sie sich für zwei einander unendlich nahe Lagen des neuen Systems nur um unendlich wenig von einander unterscheiden. Daraus folgt, dass auch der Werth des Δ in zwei unendlich nahen Lagen sich nur unendlich wenig ändern wird. Der Werth des Δ ist nun entweder $+1$ oder -1; er kann aber in zwei aufeinanderfolgenden Lagen nur unendlich wenig sich verändern, aber nicht von $+1$ zu -1 oder umgekehrt springen; daraus folgt mit Nothwendigkeit: er muss für beide Lagen constant sein. War er in der ersten Lage $+1$, so muss er auch in jeder zweiten Lage $+1$ sein, und war er zuerst -1, so ist er immer -1. Bei der ganzen Bewegung des zweiten Systems bleibt also der Werth des Δ unverändert. Man kann nun durch continuirliche Verrückung das zweite System in eine solche Lage bringen, dass die positive x' Axe mit der positiven x Axe zusammenfällt, und die positive y' Axe mit der positiven y Axe. Die

positive z' Axe kann alsdann zwei verschiedene Lagen annehmen: sie kann mit der positiven z Axe zusammen- oder zu ihr in entgegengesetzte Richtung fallen. — Fallen erstens die beiden positiven Halbaxen der z und z' zusammen, oder mit andern Worten: sind die beiden Systeme gleichstimmig, so sind für diese specielle Lage die Transformationsformeln der Coordinaten folgende:

$$x' = x \quad y' = y \quad z' = z$$

folglich

$$\alpha = 1 \;\; \beta = 0 \;\; \gamma = 0 \;\; \alpha' = 0 \;\; \beta' = 1 \;\; \gamma' = 0 \;\; \alpha'' = 0 \;\; \beta'' = 0 \;\; \gamma'' = 1.$$

Daraus folgt aber $\Delta = + 1$, und da durch irgendwelche Bewegung des zweiten Systems der Werth von Δ sich gar nicht ändert, so ist auch der ursprüngliche Werth des Δ, d. h. der bei der ursprünglichen Lage des zweiten Systems, $+ 1$ gewesen. — Nehmen wir aber zweitens an, dass bei dem Zusammenfallen des x' mit x, des y' mit y die z Axen in entgegengesetzter Richtung wären, d. h. dass wir mit zwei ungleichstimmigen Systemen zu thun hätten, so würden wir bekommen $x' = x$ $y' = y$ $z' = -z$, und dann würde der Werth des Δ -1 sein, denn von den Transformationscoefficienten sind alle Null ausser α welches $= 1$, β' welches $= 1$, γ'' welches diesmal $= -1$ ist. In diesem zweiten Falle ist folglich auch bei der ursprünglichen Lage der beiden Systeme $\Delta = -1$.

Anmerkung. Handelt es sich nicht um zwei gegebene Coordinatensysteme, sondern hat man bei einer Untersuchung die Wahl der Transformation, so kann und wird man immer annehmen, dass das neue System mit dem alten gleichstimmig ist. Sonst kann man je zwei ungleichstimmige Systeme in gleichstimmige verwandeln, indem man die eine Axe, etwa die z Axe in entgegengesetzter Richtung nimmt.

§ 31.

Nach dieser Digression gehen wir über zur Angabe eines Beispiels, wie man mit Hilfe der allgemeinen Coordinatentransformation die Durchschnitte von Ebenen und krummen Flächen findet. Wir behandeln die Aufgabe: Kann man durch einen beliebigen Punkt einer Fläche zweiten Grades einen Kreisschnitt legen? Wir stellen zu dem Ende die Gleichung der Fläche zweiten Grades so auf, dass der betrachtete Punkt Anfangspunkt wird. Analytisch stellt sich dies dadurch dar, dass das constante Glied fehlt. Da man ferner jedesmal die Coordinatenaxe so legen kann, dass in der Gleichung der Fläche die Producte je zweier verschiedener Coordinaten fehlen, so können wir als allgemeinste Gleichung der Fläche

zweiten Grades, bei der der Anfangspunkt der gegebene Punkt ist, folgende aufstellen:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dx + 2Ey + 2Fz = 0.$$

Führt man nun ein neues Coordinatensystem ein und zwar durch folgende Transformationen:

$$x = \alpha x' + \beta y' + \gamma z' \quad y = \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z' \quad z = \alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z',$$

so haben wir nach gemachter Substitution in die in diesem Systeme ausgedrückte Gleichung der Fläche die Bedingung einzuführen, dass die Fläche von einer der neuen Coordinatenebenen, z. B. von der der $x'y'$ geschnitten werde, d. h. wir haben nach (oder also auch vor) der Substitution $z' = 0$ zu setzen. Kehren wir alsdann wieder zu dem alten Coordinatensystem zurück, so haben wir darin die Gleichung $z' = 0$ auszudrücken: dies geschieht aber sehr leicht, indem wir die Transformationsgleichungen resp. mit $\gamma\ \gamma'\ \gamma''$ multipliciren und die Producte addiren; es ist nämlich wegen der Formeln (5) (6) (3) $\gamma x + \gamma' y + \gamma'' z = z'$, also ist die Gleichung der $x'y'$ Ebene im alten System folgende $\gamma x + \gamma' y + \gamma'' z = 0$. Machen wir nun obige Substitution in die gegebene Gleichung, so erhalten wir:

$$x'^2 \left\{A\alpha^2 + B\alpha'^2 + C\alpha''^2\right\} + 2x'y' \left\{A\alpha\beta + B\alpha'\beta' + C\alpha''\beta''\right\}$$
$$+ y'^2 \left\{A\beta^2 + B\beta'^2 + C\beta''^2\right\} + 2x' \left\{D\alpha + E\alpha' + F\alpha''\right\} + 2y' \left\{D\beta + E\beta' + F\beta''\right\} = 0.$$

Diese Gleichung giebt also den Durchschnitt der Ebene

$$\gamma x + \gamma' y + \gamma'' z = 0$$

mit der gegebenen Fläche zweiten Grades. Damit die dadurch ausgedrückte Curve ein Kreis sei, muss zunächst der Coefficient des zweiten Gliedes Null sein, und ferner die Coefficienten, welche die Quadrate der Coordinaten multipliciren, einander gleich. Nennen wir daher den Werth dieser beiden letztern Coefficienten f, so haben wir folgende drei Gleichungen:

$$(1)\ A\alpha\beta + B\alpha'\beta' + C\alpha''\beta'' = 0 \quad (2)\ A\alpha^2 + B\alpha'^2 + C\alpha''^2 = f$$
$$(3)\ A\beta^2 + B\beta'^2 + C\beta''^2 = f.$$

Bis hieher ist die Untersuchung ganz allgemein. Wir wollen aber von jetzt an den Fall ausschliessen, dass von den drei Coefficienten $A\ B\ C$ irgend zwei einander gleich sind. Dann ist nämlich die Fläche eine Umdrehungsfläche, und bei diesen sind alle Schnitte normal zur Axe, und nur diese Kreise. Den Fall jedoch, dass eine der drei Grössen $A\ B\ C$ Null ist, d. h. die beiden Paraboloide, sowie den elliptischen und den hyperbolischen Cylinder, schliessen wir nicht aus, wohl aber den parabolischen, denn bei diesem sind zwei Coefficienten Null, und wir haben so eben festgesetzt, dass nicht zwei denselben Werth haben sollen.

Setzen wir noch über das (bis jetzt ganz willkürlich gelassene) Grössenverhältnis der drei Coefficienten A, B, C fest, dass

$$A > B > C,$$

dass also die Differenzen $A - B$, $B - C$ positiv sind, so fragt es sich jetzt: Lassen sich die Gleichungen (1) (2) (3) für irgendwelche Coefficienten A, B, C, welche nur den so eben gemachten Bedingungen genügen, lösen, und wie lauten die daraus hervorgehenden Werthe von $\gamma \gamma' \gamma''$? Denn dass die Gleichungen die Grössen $\alpha\beta\ \alpha'\beta'\ \alpha''\beta''$ und nicht die gesuchten $\gamma\ \gamma'\ \gamma''$ enthalten, macht keinen Unterschied, da wir Relationen genug haben, um jene auf diese zu reduciren. Wir formen nun die Gleichungen (1) (2) (3) so um, dass sie nur die drei Grössen $\gamma\ \gamma'\ \gamma''$ (und ausserdem f) enthalten.

Addirt man die beiden letzten, und berücksichtigt die Gleichungen (16) (17) (18) des § 29., so findet man

$$A(1-\gamma^2) + B(1-\gamma'^2) + C(1-\gamma''^2) = 2f$$

oder

$$A\gamma^2 + B\gamma'^2 + C\gamma''^2 = A + B + C - 2f \ldots\ldots (4).$$

Multiplicirt man die beiden letzten, und subtrahirt von ihrem Producte das Quadrat der ersten, so ergiebt sich

$$AB(\alpha^2\beta'^2 - 2\alpha\alpha'\beta\beta' + \alpha'^2\beta^2) + BC(\alpha'^2\beta''^2 - 2\alpha'\alpha''\beta'\beta'' + \alpha''^2\beta'^2)$$
$$+ CA(\alpha''^2\beta^2 - 2\alpha\alpha''\beta\beta'' + \alpha^2\beta''^2)$$

oder

$$AB(\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2 + BC(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')^2 + CA(\alpha''\beta - \alpha\beta'')^2$$

oder endlich wegen der Formeln (15) (13) (14) des § 29. (cf. auch § 30.):

$$BC\gamma^2 + CA\gamma'^2 + AB\gamma''^2 = f^2 \ldots\ldots (5).$$

Dazu fügen wir noch die schon bekannte Gleichung (3) des § 29.:

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1 \ldots\ldots (6).$$

Um nun aus diesen Gleichungen (4) (5) (6) zunächst γ zu finden, multiplicire man sie der Reihe nach mit A, 1, $-A(B+C)$. Dadurch findet man

$$\{A^2 + BC - A(B+C)\}\gamma^2 = A^2 - 2Af + f^2$$

oder

$$\gamma^2 (A-B)(A-C) = (A-f)^2,$$

und analog die beiden andern Coefficienten. Man hat folglich:

$$\gamma^2 = \frac{(A-f)^2}{(A-B)(A-C)} \qquad \gamma'^2 = \frac{(B-f)^2}{(B-C)(B-A)} \qquad \gamma''^2 = \frac{(C-f)^2}{(C-A)(C-B)}.$$

Diese drei Quadrate können natürlich nur positiven Ausdrücken äquivalent sein. Nach unsrer obigen Bedingung $A > B > C$ sind zwar

$$\gamma^2 = \frac{(A-f)^2}{(A-B)(A-C)} \text{ und } \gamma''^2 = \frac{(C-f)^2}{(A-C)(B-C)},$$

nicht aber

$$\gamma'^2 = -\frac{(B-f)^2}{(B-C)(A-B)}$$

in dieser Beziehung der Bedingung entsprechend. Der Widerspruch in γ'^2 lässt sich aber nur dadurch heben, dass man $\gamma' = 0$ setzt und dadurch ist endlich auch die Grösse f bestimmt, so dass jetzt die gesuchten Coefficienten werden:

$$\gamma = \pm\sqrt{\frac{A-B}{A-C}} \quad \gamma' = 0 \quad \gamma'' = \pm\sqrt{\frac{B-C}{A-C}}.$$

Diese Werthe, die wir hier für die Coefficienten gefunden haben, führen auf zwei verschiedene Ebenen, welche Kreisschnitte liefern. Bezeichnen wir nämlich für den Augenblick $\frac{A-B}{A-C}$ mit m^2 und $\frac{B-C}{A-C}$ mit n^2, indem diese Brüche jedenfalls positiv sind, so haben wir zunächst folgende 4 Systeme:

$$\gamma = +m \;\; \gamma' = 0 \;\; \gamma'' = +n, \;\; \gamma = -m \;\; \gamma' = 0 \;\; \gamma'' = +n,$$
$$\gamma = -m \;\; \gamma' = 0 \;\; \gamma'' = -n, \;\; \gamma = +m \;\; \gamma' = 0 \;\; \gamma'' = -n.$$

Setzen wir jedoch diese vier Systeme nach einander in die Gleichung der schneidenden Ebene, nämlich in $\gamma x + \gamma' y + \gamma'' z = 0$ ein, so bekommen wir offenbar nur zwei verschiedene Ebenen, nämlich entweder $mx + nz = 0$ oder $mx - nz = 0$.

Somit haben wir gefunden, dass jede Fläche zweiten Grades, die keine Umdrehungsfläche ist, die Eigenschaft hat, dass sich durch jeden ihrer Punkte zwei Ebenen legen lassen, welche die Fläche in Kreisen schneiden; und die Gleichungen dieser schneidenden Ebenen sind, wenn die Gleichung der Fläche die oben aufgestellte Form hat: $\sqrt{A-B}.x \pm \sqrt{B-C}.z = 0$. Aus diesen Gleichungen folgt, dass beide schneidenden Ebenen auf der xz Ebene normal stehen oder der y Axe parallel sind.

Da die drei Grössen A, B, C in Bezug auf die Flächen zweiten Grades mit einem Mittelpunkte die reciproken Werthe der Axenquadrate darstellen (welche auch wie bei den Hyperboloiden negativ sein können), so kann man, wenn man in einer solchen Fläche zweiten Grades die reciproken Werthe der Axenquadrate bildet (wobei also auch imaginäre sowie unendlich grosse Axen nicht ausgeschlossen sind), diejenige Axe die mittlere Axe nennen, welcher die mittlere der drei gebildeten Grössen entspricht, und man kann alsdann unser Resultat so aussprechen:

Durch jeden Punkt einer Fläche zweiten Grades gehen zwei Kreisschnitte, die der mittlern Axe parallel sind.

§ 32.

Zusatz 1. Ein Fall ist in dem Vorigen mit eingeschlossen oder nicht eingeschlossen, wie man es nehmen will.

Es ist der Fall, wo die Grösse $f = 0$, d. h. da nach dem Früheren $f = B$ sein soll, der Fall, wenn $B = 0$ ist. Alsdann muss C negativ sein, denn wir haben vorausgesetzt $A > B$ und $B > C$. Setzen wir also $A = + \lambda^2$ und $C = - \mu^2$, so haben wir folgende Gleichung der Fläche

$$\lambda^2 x^2 - \mu^2 z^2 + 2Dx + 2Ey + 2Fz = 0,$$

eine Gleichung, welche ein hyperbolisches Paraboloid ausdrückt oder einen hyperbolischen Cylinder: das Letztere nur in dem Falle, wenn $E = 0$ ist. Wir sehen also, dass beim hyperbolischen Paraboloide und beim hyperbolischen Cylinder durch jeden Punkt zwei Ebenen gelegt werden können, von denen eine jede mit der Fläche nur eine gerade Linie gemeinschaftlich hat, und zwar eine Gerade, die man als einen Kreis von unendlich grossem Radius anzusehen hat.

Beim hyperbolischen Cylinder ist das evident. Da man nämlich durch jeden Punkt einer Hyperbel zwei Linien legen kann, die die Hyperbel nur eben in diesem Punkte treffen, nämlich diejenigen beiden Linien, welche den Asymptoten der Hyperbel parallel sind, so werden die beiden Ebenen, welche man über diesen Linien normal zur Ebene der Hyperbel errichtet, den hyperbolischen Cylinder nur in der Seite schneiden, welche normal über jenem Punkt steht. — Beim Paraboloide ist die Sache nicht so einfach; aber die Rechnungen, die wir angestellt haben, geben vollkommen darüber Bescheid. Es sind nämlich, wie aus dem vorigen Paragraphen klar ist, die Gleichungen dieser geraden Linie:

$$x'(D\alpha + E\alpha' + F\alpha'') + y'(D\beta + E\beta' + F\beta'') = 0$$

und ausserdem die Gleichung des Paraboloids resp. Cylinders, wobei man noch die Grössen α und β danach zu bestimmen hat, dass

$$\gamma^2 = \frac{A}{A-C} \text{ und } \gamma' = 0, \ \gamma''^2 = \frac{-C}{A-C} \text{ sind.}$$

Man kann also, selbst diese beiden Ausnahmefälle mit hineinziehend, allgemein sagen: Durch jeden Punkt einer Fläche zweiten Grades gehen zwei Kreisschnitte; die Ebenen aller dieser Kreisschnitte liegen in zwei parallelen Systemen. Denn ergiebt sich als Schnitt eine gerade Linie, so kann diese hier nicht als ein System zweier einander deckenden Geraden, d. h. als Entartung der Parabel, sondern muss als ein Kreis mit unendlich grossem Radius angesehen werden.

Zusatz 2. Als specielleres Beispiel wollen wir kürzlich noch das zweischalige Hyperboloid $\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} - \frac{\zeta^2}{c^2} = 1$ untersuchen, indem wir durch den Punkt (ξ_1, η_1, ζ_1) desselben Kreisschnitte legen. Wir

wählen diesen Punkt zum neuen Anfangspunkt, d. h. wir substituiren $\xi-\xi_1=x$, $\eta-\eta_1=y$, $\zeta-\zeta_1=z$:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+\frac{2\xi_1 x}{a^2}-\frac{2\eta_1 y}{b^2}-\frac{2\zeta_1 z}{c^2}=0,$$

und haben dadurch die Gleichung auf die Form gebracht, die wir oben in der allgemeinen Entwickelung zu Grunde gelegt haben. Offenbar ist $\frac{1}{a^2}$ der grösste Coefficient, denn die beiden andern sind negativ, und ist $b>c$, so ist $-\frac{1}{b^2}>-\frac{1}{c^2}$, also entsprechen hiernach diese drei Coefficienten geradezu den obigen A, B, C. Die Gleichung

$$\sqrt{A-B}\; x \pm \sqrt{B-C}\; z = 0$$

wird also

$$c x \sqrt{a^2+b^2} \pm a z \sqrt{b^2-c^2}=0$$

oder in den ursprünglichen Coordinaten:

$$c(\xi-\xi_1)\sqrt{a^2+b^2}\pm a(\zeta-\zeta_1)\sqrt{b^2-c^2}=0.$$

Dies sind also die beiden Ebenen, welche durch den Punkt $\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1$ gehen und das Hyperboloid in je einem Kreise schneiden.

3. Tangentialebene und Normale.

§ 33.

Jetzt uns wieder zu allgemeineren Untersuchungen wendend, gehen wir zur Tangentialebene über. Es sei die Gleichung einer Fläche in der Form $F(x, y, z)=0$ gegeben. Denken wir uns auf dieser Fläche irgend eine Curve gezogen, so können wir sie analytisch entweder darstellen durch zwei Gleichungen zwischen x, y, z, von denen die eine eben selbst $F=0$ sein könnte, oder, wenn wir sie unabhängig von der Fläche betrachten wollen, dadurch, dass wir $x\,y\,z$ als Functionen von t ausdrücken, so dass t irgend eine vierte Grösse bedeutet. Legt man dieser Grösse t andre und andre Werthe bei, so bekommt man immer andre Punkte der Curve. Setzt man diese Werthe in die linke Seite der Gleichung $F=0$ ein, so muss sie identisch Null werden. Denn würde sie nicht Null, sondern irgend eine Function f von t, so liessen sich aus der alsdann bestehenden Gleichung $f(t)=0$ eine endliche Anzahl von Werthen für t ableiten oder es könnte doch dieser Gleichung nicht durch continuirliche Werthe Folge geleistet werden, sondern man erhielte nur eine Anzahl discreter Werthe von t. Benutzte man diese wiederum um die zugehörigen Coordinaten $x\,y\,z$ der Curve zu berechnen, so ergäben sich somit nur einzelne Punkte der Curve und keine continuirliche Folge. Die Curve könnte somit nicht ganz und gar auf

der Fläche liegen, indem die Gleichungen beider Raumgebilde nur durch eine bestimmte Anzahl von Werthen für die Coordinaten zugleich erfüllt würden. — Leichter noch sieht man dies a posteriori ein: Man denke sich eine Fläche $F(x, y, z) = 0$, und irgend eine, ganz beliebige Curve, gegeben durch drei Gleichungen: x, y, z als Functionen einer vierten Grösse t. Will man die Durchschnittspunkte der Linie und der Fläche bestimmen, so hat man die Werthe der Coordinaten aus der Gleichung der Curve in die Gleichung der Fläche einzusetzen, und aus der resultirenden Gleichung für t alle Werthe dieser Grösse zu bestimmen: diese bedingen die Durchschnittspunkte der Curve und der Fläche. Soll aber jetzt die Curve ganz auf der Fläche liegen, so muss es kein Mittel geben, um solche Werthe von t zu bestimmen. Es ist somit klar, dass unter den angegebenen Voraussetzungen die Gleichung der Fläche identisch erfüllt wird, wenn man in sie die Werthe der Coordinaten substituirt, welche sie in den Gleichungen der auf der Fläche gezogenen Linie haben.

Zieht man nun in einem bestimmten Punkte $x\,y\,z$ der Curve, die auf der Fläche liegt, die Tangente an die Curve, so bestehen für jeden Punkt $\xi\,\eta\,\zeta$ dieser Tangente die beiden Gleichungen

$$\frac{\xi - x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\eta - y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{\zeta - z}{\frac{dz}{dt}}.$$

Setzt man nun die Werthe der Coordinaten $x\,y\,z$ durch t ausgedrückt in die Gleichung $F = 0$ ein, so ergiebt sich, wie erwähnt, die identische Gleichung $0 = 0$; deshalb muss auch das Differential dieser Gleichung nach t ebenfalls Null sein, d. h. man muss haben

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0,$$

was wir der Kürze halber so schreiben wollen:

$$F'(x)\frac{dx}{dt} + F'(y)\frac{dy}{dt} + F'(z)\frac{dz}{dt} = 0.$$

Da nun die Grössen $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ proportional sind den Grössen $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$, und auf der rechten Seite der letzten Gleichung Null steht, so kann man statt der Differentialquotienten in sie die Differenzen einsetzen und erhält

$$(\xi - x)\,F'(x) + (\eta - y)\,F'(y) + (\zeta - z)\,F'(z) = 0.$$

Diese Gleichung findet also statt zwischen einem Punkte $x\,y\,z$ irgend einer Curve, die auf der Fläche $F = 0$ liegt, und zwischen dem Punkte $\xi\,\eta\,\zeta$ der Tangente im Punkte xyz der Curve. Es ist nun merkwürdigerweise in dieser Gleichung zwar der Punkt xyz,

sowie der Punkt $\xi\eta\zeta$ enthalten, aber keine Spur von der speciellen Curve, welche auf der Fläche gezogen worden ist. Zieht man daher jetzt durch denselben Punkt xyz nicht eine Curve auf der Fläche, sondern unzählig viele Curven, und an alle diese Curven die Tangenten im Punkte xyz, so werden alle Punkte aller dieser Tangenten der obigen Gleichung genügen, und da man xyz als Constante, den Punkt $\xi\eta\zeta$ der Tangente irgend einer dieser Curven als veränderliche, d. h. $\xi\eta\zeta$ als laufende Coordinaten anzusehen hat, so ist die gefundene Gleichung die einer Ebene. Wir haben somit durch diese Entwickelung gefunden und bewiesen den

Lehrsatz: Zieht man durch einen Punkt einer Fläche alle möglichen Curven und alle Tangenten an diese Curven, so liegen alle diese Tangenten in einer Ebene; oder, anders ausgedrückt: Der Ort der Tangenten aller Curven, welche man durch einen Punkt einer Fläche ziehen kann, ist eine Ebene, und ihre Gleichung $(\xi - x)\,F'(x) + (\eta - y)\,F'(y) + (\zeta - z)\,F'(z) = 0$.

Erklärung. Man nennt diese Ebene die Tangentialebene der Fläche im Punkte xyz.

§ 34.

Anmerkung 1. Dies ist ganz streng festzuhalten, dass die Tangentialebene nichts weiter ist als der Ort dieser Tangenten, und nicht geradezu diejenige Ebene, welche die Fläche im gegebenen Punkte berührt. Es kommt nämlich eben so oft vor, dass die Tangentialebene, an einem Punkte der Fläche construirt, die Fläche schneidet, als dass sie sie nicht schneidet, d. h. denkt man sich durch einen Punkt einer Fläche sämmtliche Tangenten gezogen, so kann die Ebene, in welcher alle diese Tangenten liegen, die Fläche ganz auf der einen, oder z. Th. auf der einen, z. Th. auf der andern Seite liegen haben. Von der ersten Art bietet die Kugel in allen Punkten ein Beispiel. Ein Beispiel zu der zweiten Art findet man leicht, wenn man sich einen Bogen ab um eine Axe rotirend denkt, siehe Fig. 13, welcher er die erhabene Seite zukehrt. Construirt man in einem Punkte c der entstehenden Fläche die Tangente an die erzeugende Curve, und die Tangente an den von c beschriebenen Kreis, so ist die Ebene dieser beiden Tangenten die Tangentialebene. Ein Theil der erzeugten Fläche liegt, wie man sich leicht überzeugt, diesseits, ein andrer jenseits dieser Ebene.

Anmerkung 2. Es kann übrigens auch leicht vorkommen, dass eine Tangentialebene gar nicht existirt. Dies geschieht in dem Falle, dass für den betreffenden Punkt der Fläche gleichzeitig

$\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ verschwinden. Dann wird die Gleichung durch jeden Werth von $\xi \eta \zeta$ identisch erfüllt, drückt also gar nichts mehr aus. Ein solcher Fall ist z. B. an der Spitze des Kegels, wo die Tangenten keine Ebene mehr bilden.

§ 35.

Folgerung 1. Wenn eine Gerade ganz auf einer Fläche liegt, so wird in jedem Punkte dieser Geraden die Tangentialebene zugleich die Gerade enthalten. Dies ist evident, insofern die Gerade eine Curve ist, die ihre eigene Tangente ist.

Folgerung 2. Wenn durch einen Punkt einer Fläche zwei Geraden gehen, so muss die Ebene, welche durch beide geht, zugleich die Tangentialebene sein: immer vorausgesetzt, dass die Punkte, um welche es sich hier handelt, nicht solche Ausnahmspunkte sind, in welchen überhaupt gar keine Tangentialebene existirt.

Anmerkung. Bei diesen geradlinigen Flächen, d. h. bei denjenigen, welche durch die Bewegung einer Geraden entstanden sind, gilt entweder für alle Punkte einer ihrer Geraden dieselbe Tangentialebene (Cylinder), oder die Tangentialebene ändert sich von Punkt zu Punkt.

Zusatz. Wird die Gleichung einer Fläche in aufgelöster Form dargestellt: $z - f(x, y) = 0$, so ist $\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x}$, was man mit $-p$ zu bezeichnen gewohnt ist, so wie $\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y}$ mit $-q$; endlich wird $\frac{\partial F}{\partial z}$ in diesem Falle $= 1$. Unter dieser Voraussetzung wird also die Gleichung der Tangentialebene folgende Gestalt annehmen:

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y).$$

Offenbar kann man aus dieser Form die obige wieder ableiten. Aus der Gleichung $F(x, y, z) = 0$ folgt nämlich, wenn man y als constant und z nur als Function von x ansieht:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dx} \text{ oder } \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\, p = 0 \text{ und ähnlich } \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\, q = 0,$$

woraus also (mit abgekürzter Bezeichnung) hervorgeht:

$$p = -\frac{F'(x)}{F'(z)},\; q = -\frac{F'(y)}{F'(z)}.$$

Setzen wir dies in die so eben aufgestellte Gleichung ein, so verwandelt sie sich in die ursprüngliche

$$(\xi - x)\, F'(x) + (\eta - y)\, F'(y) + (\zeta - z)\, F'(z) = 0.$$

Bemerkung. Beide Formen der für die Tangentialebenen auf-

gestellten Gleichung sind allgemein richtig, die Coordinaten mögen rechtwinklige oder schiefwinklige sein. Von jetzt an wollen wir jedoch rechtwinklige Coordinaten annehmen, weil der Fall der schiefwinkligen Coordinaten eine Aenderung nöthig machen würde, die sonst zu nichts weiter führt.

Zusatz. Man nennt Normale einer Fläche die Gerade, die auf der Tangentialebene normal steht. Daraus folgt, dass am Punkte $x\,y\,z$ einer Fläche die Gleichungen der Normale folgende sind:

$$\frac{\xi-x}{F'(x)}=\frac{\eta-y}{F'(y)}=\frac{\zeta-z}{F'(z)}.$$

§ 36.

Bei den algebraischen Flächen gestattet die Gleichung der Tangentialebene jedesmal eine Reduction, von der es gut ist, dass man sie ein für allemal kennt. Bilden wir uns zunächst die Gleichung der Tangentialebene für die Flächen zweiten Grades (mit Ausnahme der Cylinderflächen), die in der Gleichung $A\xi^2+B\eta^2+C\zeta^2=1$ enthalten sind, so finden wir nach dem Obigen

$$(\xi-x)\,2Ax+(\eta-y)\,2By+(\zeta-z)\,2Cz=0,$$

oder da für den Punkt $x\,y\,z$ die Gleichung $Ax^2+By^2+Cz^2=1$ besteht: $Ax\xi+By\eta+Cz\zeta-1=0$, eine der Gleichung der vorgelegten Fläche sehr conforme Gestalt.

Eine ganz ähnliche Transformation lässt sich bei allen Tangentialebenen algebraischer Flächen machen. Es sei $F(x,y,z)=0$ die Gleichung einer Fläche des n^{ten} Grades, in der alle Nenner und Wurzelgrössen, die die Coordinaten enthalten, weggeschafft zu denken sind. Dann besteht die Gleichung $F=0$ aus einer Reihe von Gliedern, von denen die höchsten von der n^{ten} Dimension sind; auf diese kommen Glieder von der $\overline{n-1}^{\text{ten}}$ Dimension, u. s. w. Jede Gruppe von solchen Gliedern, wenn wir sie nach den Dimensionen eintheilen, ist homogen, d. h. in jeder Gruppe ist die Summe der Exponenten der Coordinaten constant. Ueber solche homogene Functionen existirt nun folgendes

Lemma. Wenn U_m eine homogene Function des m^{ten} Grades von den drei Variabeln $x\,y\,z$ bedeutet, so hat man folgende Gleichung:

$$x.\frac{\partial U_m}{\partial x}+y.\frac{\partial U_m}{\partial y}+z.\frac{\partial U_m}{\partial z}=m.U_m.$$

Der Beweis ist in Folgendem gegeben: U_m wird bestehen aus einer Summe von Gliedern von folgender Art: $x^\alpha.y^\beta.z^\gamma$, worin $\alpha+\beta+\gamma=m$ ist. Differentiirt man ein solches Glied nach x und multiplicirt es alsdann mit x, so erhält man $\alpha.x^{\alpha-1}.y^\beta.z^\gamma.x$ oder $\alpha.x^\alpha.y^\beta.z^\gamma$. Be-

handelt man das Glied ebenso in Bezug auf y und dann in Bezug auf z, so erhält man resp. $\beta . x^\alpha . y^\beta . z^\gamma$ und $\gamma . x^\alpha . y^\beta . z^\gamma$. Addirt man diese drei Ausdrücke, so erhält man

$$(\alpha + \beta + \gamma)\, x^\alpha . y^\beta . z^\gamma \text{ oder } m . x^\alpha . y^\beta . z^\gamma;$$

und so mit jedem Gliede, woraus U_m besteht. —

Es habe nun die vorgelegte Function $F(x, y, z)$ die Form

$$U_n + U_{n-1} + U_{n-2} + \cdots\cdots + U_1 + U_0,$$

so dass diese Summe (in welcher U_0 eine Constante bedeutet) gleich Null ist; dann ist die Gleichung der Tangentialebene:

$$(\xi - x) \left\{ \frac{\partial U_n}{\partial x} + \frac{\partial U_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial U_{n-2}}{\partial x} + \cdots\cdots + \frac{\partial U_1}{\partial x} \right\}$$
$$+ (\eta - y) \left\{ \frac{\partial U_n}{\partial y} + \frac{\partial U_{n-1}}{\partial y} + \frac{\partial U_{n-2}}{\partial y} + \cdots\cdots + \frac{\partial U_1}{\partial y} \right\}$$
$$+ (\zeta - z) \left\{ \frac{\partial U_n}{\partial z} + \cdots\cdots + \frac{\partial U_1}{\partial z} \right\} = 0$$

oder nach dem Lemma

$$\xi . \frac{\partial F}{\partial x} + \eta . \frac{\partial F}{\partial y} + \zeta . \frac{\partial F}{\partial z}$$
$$= n . U_n + \overline{n-1} . U_{n-1} + \overline{n-2} . U_{n-2} + \cdots\cdots + 2U_2 + U_1,$$

woraus wir noch die Glieder der höchsten Dimension, nämlich U_n, mittelst der Gleichung $U_n = -(U_{n-1} + U_{n-2} + \cdots\cdots + U_0)$ eliminiren können, so dass hiernach endlich die Gleichung der Tangentialebene für algebraische Curven wird:

$$\xi . F'(x) + \eta . F'(y) + \zeta . F'(z) + U_{n-1} + 2\,U_{n-2} + 3\,U_{n-3}$$
$$+ \cdots\cdots + \overline{n-1}\; U_1 + n\, U_0 = 1.$$

Aus dieser Form der Gleichung wollen wir zunächst noch einen Schluss ziehen.

Denken wir uns, es sei ein Punkt ausserhalb der Fläche gegeben, so ist, wenn wir uns die Aufgabe stellen, von ihm aus an die Fläche mehrere Tangentialebenen oder eine wenigstens zu legen, die unbekannte Grösse dieser Aufgabe der Berührungspunkt, von dem wir jedoch wissen, dass er ein Punkt der Fläche ist, und also, wenn wir ihn mit $x\,y\,z$ bezeichnen, der gegebenen Gleichung $F(x, y, z) = 0$ genügen muss, so wie, wenn wir den gegebenen Punkt ausserhalb der Fläche mit $\xi\,\eta\,\zeta$ bezeichnen, der Gleichung der Tangentialebene dieses Punktes, die wir hier in der zuletzt aufgestellten Form anwenden wollen. Wir haben also zur Bestimmung der Coordinaten x, y, z zwei Gleichungen, vom n^{ten} resp. $\overline{n-1}^{\text{ten}}$ Grade, und können daraus also unzählig viele Werthe für die Coordinaten ableiten. Wenn man also von einem Punkte $\xi\,\eta\,\zeta$ an eine Fläche des n^{ten} Grades $F = 0$ Tangentialebenen legen soll, so liegen die Berührungs-

punkte derselben (ausser auf der Fläche $F = 0$) auf einer Fläche des $\overline{n-1}^{\text{ten}}$ Grades. Denkt man sich von dem gegebenen Punkte nach dem Durchschnitt dieser beiden Flächen, d. h. nach der Curve der Berührungspunkte Gerade gezogen, so bilden diese offenbar den Kegel, welcher in seinen Kanten die Fläche $F = 0$ berührt, oder welcher der Fläche umschrieben ist. Man kann somit folgenden Satz aussprechen:

Wenn man von einem Punkte $\xi\eta\zeta$ einen Berührungskegel an eine Fläche des n^{ten} Grades legt, so liegt die Berührungscurve auf einer Fläche des $\overline{n-1}^{\text{ten}}$ Grades.

Hiervon ist ein specieller Fall: die Curve, in welcher der Berührungskegel einer Fläche zweiten Grades dieselbe berührt, ist eine ebene, der bekannteste und wichtigste Satz aus der Theorie der Flächen zweiten Grades. Für die Flächen dritten Grades findet man: Legt man von einem Punkte an eine Fläche dritten Grades einen Berührungskegel, so wird die Berührungscurve eine Curve doppelter Krümmung, doch so, dass sich durch dieselbe jedesmal eine Fläche zweiten Grades legen lässt: sie ist also der Durchschnitt der gegebenen Fläche und einer gewissen Fläche zweiten Grades.

Man kann jedoch der Gleichung der Tangentialebene noch eine andere Form geben, in welcher sie vollkommen symmetrisch ist. Die Gleichung der gegebenen Fläche $F(x, y, z) = 0$ besteht zwar aus homogenen Gruppen, ist selbst aber nicht homogen in Bezug auf $x\,y\,z$. Wir können sie aber homogen machen, wenn wir eine vierte Grösse w einführen, deren Zahlenwerth ein für allemal 1 ist, und die nur dazu dienen soll, den einzelnen Gruppen gleiche Dimensionen zu geben, d. h. die Gleichung der Fläche homogen zu machen, was dadurch erreicht wird, wenn wir sie folgendermassen schreiben:

$$U_n + wU_{n-1} + w^2 U_{n-2} + w^3\, U_{n-3} + \cdots\cdots + w^n U_0 = 0.$$

Diese Gleichung ist nämlich in Bezug auf die vier Grössen x, y, z, w homogen und zwar von der n^{ten} Ordnung. Bildet man nun den Differentialquotienten $F'(w)$, so ist dieser

$$= U_{n-1} + 2\,w\,U_{n-2} + 3w^2\,U_{n-3} + \cdots\cdots + n\,w^{n-1}\,U_0,$$

und setzt man hierin $w = 1$, so sieht man, dass mit Anwendung dieser Bezeichnung die Gleichung der Tangentialebene einer algebraischen Fläche in folgende Gestalt gebracht werden kann:

$$\xi.\,F'(x) + \eta.\,F'(y) + \zeta.\,F'(z) + \tilde{\omega}.\,F'(w) = 0,$$

wo $\tilde{\omega}$ ein Factor ist, dessen Zahlenwerth ebenfalls 1 ist, so wie der von w, und der nur der Gleichförmigkeit halber hinzugesetzt worden ist. Um also die Gleichung der Tangentialebene einer algebraischen Fläche $F(x, y, z) = 0$ zu finden, führe man

eine Grösse w ein, welche dazu dient, alle Glieder der Gleichung $F = 0$ homogen zu machen, so dass die Gleichung der Fläche jetzt wird $F(x, y, z, w) = 0$. Dann ist die Gleichung der Tangentialebene:

$$\xi . F'(x) + \eta . F'(y) + \zeta . F'(z) + \tilde{\omega} . F'(w) = 0,$$

worin man nach der Aufstellung derselben w und $\tilde{\omega}$ gleich 1 zu setzen hat.

§ 37.

Schon oben wurde erwähnt, dass ein wesentlicher Unterschied zwischen Tangentialebenen einer Fläche und Tangenten einer Curve darin besteht, dass bei der Tangentialebene das Schneiden der Fläche ein eben so häufig vorkommender Fall ist, wie das Nichtschneiden, während doch die Tangente einer Curve im Allgemeinen die Curve auf einer Seite lässt, oder sie nicht schneidet, und das Schneiden hier nur in speciellen Fällen, in den sogenannten Wendepunkten vorkommt, deren mögliche Anzahl noch dazu bei den algebraischen Curven eine endliche, beschränkte ist. Ehe wir uns den analytischen Grund davon aufsuchen, warum, was bei den Curven Ausnahme ist, bei den Flächen nicht mehr als Ausnahme angesehen werden kann, lösen wir, um über dieses Schneiden der Tangentialebene eine präcise Vorstellung zu bekommen, folgende specielle

Aufgabe: In welchem Falle schneidet die Tangentialebene einer Fläche zweiten Grades diese Fläche? Wir lassen hierbei die Cylinder, sowie den Kegel bei Seite oder erwähnen sie nur, wo sie sich als specieller Fall darbieten. Wir führen auch die Discussion nur für die Flächen mit einem Mittelpunkt durch, weil die Untersuchung der beiden Paraboloide dieser ganz analog ist.

Für die Fläche (1) $\cdots\cdots A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1$ bilden wir also in dem speciellen Punkte $x\, y\, z$ die Tangentialebene:

$$(2) \cdots\cdots A\xi x + B\eta y + C\zeta z = 1;$$

dann fragt es sich: schneidet sie die gegebene Fläche; oder: giebt es Werthe der Coordinaten (ausser den Coordinaten des Berührungspunktes), die beiden Gleichungen (1) und (2) gemeinschaftlich sind? Dass der Berührungspunkt wirklich beiden Flächen gemeinschaftlich ist, sieht man daran, dass seine Coordinaten sowohl die Gleichung der Fläche als die der Ebene erfüllen, denn sie machen beide zu (3) $\cdots\cdots Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$, welches ja die Bedingung ist, dass der Punkt auf der gegebenen Fläche liegt. Um andere Werthe von x, y, z aus den Gleichungen (1) (2) (3) zu finden, bilden wir uns folgende Combinationen dieser Gleichungen: (1) + (3) — 2. (2) und (2) — (3) und erhalten dadurch

$$(4) \cdots\cdots A(\xi-x)^2 + B(\eta-y)^2 + C(\zeta-z)^2 = 0$$

und

$$(5) \cdots\cdots Ax(\xi-x) + By(\eta-y) + Cz(\zeta-z) = 0.$$

Diese beiden letzten Gleichungen ersetzen vollständig die Gleichungen (1) und (2), d. h. man kann aus ihnen, natürlich mit Hilfe von (3), die beiden ersten Gleichungen wieder herleiten. Wir suchen also Werthe von $\xi\,\eta\,\zeta$, welche den beiden Gleichungen (4) und (5) zugleich genügen. In Bezug darauf sieht man auf der Stelle, dass solche Werthe (ausser den Coordinaten des Berührungspunktes) gar nicht existiren können, sobald A, B, C alle drei gleiches Zeichen haben, weil die Gleichung (4) dadurch unmöglich würde, d. h.

Das Ellipsoid hat mit seiner Tangentialebene nur den Punkt $\xi = x$, $\eta = y$, $\zeta = z$ gemein.

Behufs der weitern Untersuchung setzen wir der Einfachheit halber für den Augenblick die beiden Quotienten

$$\frac{\xi-x}{\zeta-z} = \lambda \text{ und } \frac{\eta-y}{\zeta-z} = \mu,$$

mit welcher Bezeichnung sich die beiden Gleichungen (4) und (5) so schreiben lassen:

$$(4^*) \cdots\cdots A\lambda^2 + B\mu^2 + C = 0 \text{ und } (5^*) \cdots\cdots Ax\lambda + By\mu + Cz = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen kann man λ und μ finden. Es folgt

$$B\left\{Ax^2 + By^2\right\}\mu^2 + 2BCyz\mu + C\left\{Ax^2 + Cz^2\right\} = 0,$$

und eine ähnliche Gleichung für λ. Es handelt sich nun blos um die reellen Werthe von λ und μ. Die Realität der beiden Wurzeln für μ hängt ab von dem Zeichen folgenden Ausdrucks:

$$(BCyz)^2 - BC\left\{Ax^2 + Cz^2\right\}\left\{Ax^2 + By^2\right\}$$

oder

$$-BCAx^2\left\{Ax^2 + By^2 + Cz^2\right\},$$

also von dem Zeichen des Products $-ABC$. Ist nämlich dieses Product $\gtreqless 0$, oder ist $ABC \lesseqgtr 0$, so ergeben sich für μ zwei reelle, resp. gleiche oder imaginäre Wurzeln.

Ist 1) $ABC < 0$, d. h. negativ, so muss, da nicht alle drei Coefficienten A, B, C gleiches Zeichen haben können, einer der drei Coefficienten negativ, die beiden andern positiv sein; d. h. die Fläche ist ein einflächiges Hyperboloid. Die beiden reellen Wurzeln des λ seien λ', λ'', die des μ seien μ', μ'': dann hat man die beiden Proportionen:

$$\xi-x : \eta-y : \zeta-z = \lambda' : \mu' : 1; \quad \xi-x : \eta-y : \zeta-z = \lambda'' : \mu'' : 1;$$

die Werthe von λ und μ folgen aus den beiden quadratischen Gleichungen. Die beiden zuletzt gefundenen Proportionen drücken aber zwei gerade Linien aus; wir haben also den Satz:

Mit einem einflächigen Hyperboloid hat die Tangentialebene zwei Gerade gemein.

Ist 2) $ABC = 0$, was nur dadurch möglich ist, dass wenigstens eine der drei Grössen $A, B, C = 0$ ist, so finden wir ebenso: Mit einem Cylinder hat die Tangentialebene ein System zweier sich deckenden Geraden gemein.

Ist endlich 3) $ABC > 0$ oder positiv, so haben λ und μ keine reellen Werthe, und wir finden: Mit dem Ellipsoide und mit dem zweiflächigen Hyperboloide hat die Tangentialebene nur den Berührungspunkt gemein.

Zusatz. Mit einem elliptischen Paraboloid hat die Tangentialebene ausser dem Berührungspunkt keinen Punkt gemein; dagegen findet bei dem hyperbolischen Paraboloid wiederum ein Schneiden statt.

§ 38.

Ehe wir nun zu der im vorigen Paragraphen angedeuteten Untersuchung übergehen, erwähnen wir als

Lemma: Ein Ausdruck zweiter Ordnung mit einer Variabeln, $a.u^2$, hat, wenn a nicht Null ist, immer dasselbe Zeichen, nämlich das Zeichen von a, welchen realen Werth man auch dem u beilegen mag. Ein Ausdruck zweiter Ordnung mit zwei Variabeln jedoch, $au^2 + 2buv + cv^2$, hat nicht immer dasselbe Zeichen: es kann kommen, dass er entweder stets dasselbe Zeichen beibehält und dann muss er dasselbe Zeichen haben wie a (denn man kann $v = 0$ setzen), oder es kann vorkommen, dass er bald positiv, bald negativ ist. Wir wollen untersuchen, in welchem Falle er das eine thut, in welchem das andre. Die erste specielle Bedingung sei wiederum, dass a wesentlich von Null verschieden ist. Dann können wir den vorgelegten Ausdruck so schreiben

$$\frac{1}{a}\left\{a^2u^2 + 2abuv + acv^2\right\} \text{ oder } \frac{1}{a}\left\{(au + bv)^2 + (ac - b^2)v^2\right\}.$$

Zwei Fälle erledigen sich sehr leicht. Ist nämlich $ac - b^2 > 0$, so hat offenbar der Ausdruck beständig dasselbe Zeichen und zwar das Zeichen von a. Ebenso verhält es sich auch, wenn $ac - b^2 = 0$ ist. Ist dagegen drittens $ac - b^2 < 0$, so kann der Ausdruck bald positiv, bald negativ sein. Denn setzen wir in diesem Falle $ac - b^2 = -d^2$ und schreiben $au + bv = w$, dann lässt sich der Ausdruck

$$\frac{1}{a}\left\{w^2 - d^2v^2\right\}$$

in Factoren zerlegen $\frac{1}{a}\left\{w + d.v\right\}\left\{w - d.v\right\}$, und man kann offenbar dem w und v solche Werthe beilegen, dass das genannte Product positiv ist, und eben dass es negativ ist. Wollen wir es positiv

haben, so brauchen wir nur dem w und v positive Werthe beizulegen und so dass $v < \frac{w}{d}$; oder wollen wir es negativ haben, so brauchen wir ebenfalls dem w und v nur positive Werthe beizulegen und so dass $v > \frac{w}{d}$ ist: ja wir können es sogar dahin bringen, dass der Ausdruck Null ist. Wenn also $ac - b^2$ negativ ist, so behält unser Ausdruck das Zeichen nicht bei, wenn die Variabeln u und v alle möglichen realen Werthe durchlaufen. — Ist dagegen $a = 0$, so kann $ac - b^2$ nie > 0 sein, und gleich Null nur dann, wenn auch $b = 0$ ist, wodurch wir auf die Form cv^2 kommen, welche zu allererst behandelt worden ist. Ist aber endlich b nicht $= 0$, so kann man den Ausdruck $2buv + cv^2$ oder $v\{2bu + cv\}$ positiv oder negativ machen wie man will.

Hierin liegt der Grund dafür, dass bei den Flächen die Tangentialebene eben so oft schneidet als nicht.

§ 39.

Nach diesen Erörterungen sind wir nun im Stande, das Kriterium allgemein anzugeben, wann die Tangentialebene ihre Fläche schneidet, wann nicht. Man denke sich einen Punkt der Fläche xyz, und in ihm die Tangentialebene. Wir fällen die z Coordinate des Punktes, deren Fusspunkt somit die Coordinaten x, y haben wird. Ein Punkt der xy Ebene in der Nähe dieses Fusspunktes möge die Coordinaten haben $x + h$, $y + k$. In diesem letzteren Punkte denke man sich eine Gerade normal errichtet, welche sowohl die Fläche als die Tangentialebene des ersten Punktes trifft. Es können nun zwei Fälle eintreten. Diese Gerade trifft zuerst die Fläche und dann die Tangentialebene — oder umgekehrt. Verfährt man so nicht bloss mit dem Punkt $(x + h, y + k)$, sondern mit allen Punkten der xy Ebene, welche im unmittelbaren Umkreise des Fusspunktes von z liegen, so werden sich folgende zwei Fälle unterscheiden lassen: entweder treffen alle jene Geraden zuerst die Fläche oder zuerst die Tangentialebene — oder einige treffen zuerst die Fläche, die übrigen zuerst die Tangentialebene. Im ersten Falle liegt offenbar die Fläche ganz auf der einen Seite der Tangentialebene — im andern theils auf der einen, theils auf der andern Seite; oder: im ersten Falle schneidet die Tangentialebene die Fläche nicht, — im zweiten schneidet sie sie.

Um dies analytisch festzusetzen, nehmen wir an, dass die Gerade aus dem Punkte $(x + h, y + k)$ normal errichtet die Tangentialebene in der Höhe Z_1, die Fläche aber in der Höhe Z trifft. Lässt

man nun die Grössen h und k sich ändern, wobei sie aber immer als sehr kleine vorausgesetzt werden, so erhält man die Punkte im Umkreise des Fusspunktes von z, und der oben als erster bezeichnete Fall wird sich dadurch bestimmen, dass für alle diese Punkte Z kleiner ist als Z_1, oder für alle Punkte Z grösser als Z_1, dass mit einem Worte für alle diese Punkte die Differenz $Z-Z_1$ immer dasselbe Zeichen behält. Im zweiten Falle dagegen, wo die Fläche von der Tangentialebene geschnitten wird, so dass sie das eine Mal über, das andre Mal unter derselben ist, ist das Z_1 der Tangentialebene das eine Mal grösser, das andre Mal kleiner als das Z der Fläche, das heisst das Vorzeichen der Differenz $Z-Z_1$ ist nicht für alle jene Punkte in der xy Ebene dasselbe.

Hiernach nun reducirt sich unsre Untersuchung auf Folgendes: Bezeichnet xyz den Punkt, in welchem man die Tangentialebene construirt hat, so berechne man die z Coordinate der Tangentialebene sowohl als die der Fläche, welche demselben $x+h$, $y+k$ entsprechen. Wenn dann die Differenz dieser beiden z Coordinaten für alle Werthe von h und k, die wir immer als sehr klein anzunehmen haben, das Zeichen nicht wechselt, so findet kein Schneiden statt. Wenn aber die Differenz der z das Zeichen wechseln kann, so findet ein Schneiden statt.

Untersuchen wir hiernach zuerst die Curven in der Ebene, so hat man die vorige Regel in folgende zu verwandeln. Man berechne die y Coordinaten für den Werth $x+h$ sowohl bei der Curve als bei der Tangente. Die Gleichung der Tangente ist bekanntlich, wenn x, y den Berührungspunkt und ξ, η die laufenden Coordinaten bedeuten: $\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x)$. Setzen wir $\xi = x+h$, so bekommen wir $Y_1 = y + h.\frac{dy}{dx}$. Berechnet man ebenso das Y der Curve, d. h. den Werth von $F(x)$ für x gleich $x+h$, so erhält man nach dem Taylor'schen Lehrsatz:

$$Y = y + h.\frac{dy}{dx} + \tfrac{1}{2}h^2.\frac{d^2y}{dx^2} + \tfrac{1}{6}h^3.\frac{d^3y}{dx^3} + \cdots\cdots \text{in inf.}$$

Nimmt man jetzt den Unterschied dieser beiden Ordinaten $Y-Y_1$, so ist er offenbar eine Reihe, welche mit $\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}.h^2$ anfängt, und da h jeden beliebigen Grad der Kleinheit annehmen kann, so kann man es nach einem bekannten Satze so klein bestimmen, dass das Vorzeichen dieses Gliedes das Vorzeichen der ganzen Reihe darstellt. Nach dem Lemma des vorigen Paragraphen wechselt aber für alle realen Werthe von h das Glied $\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}.h^2$ sein Zeichen nicht; d. h. bei den ebenen Curven liegt die Tangente immer auf der einen Seite der

Curve. — Ausgenommen ist hiervon nur der Fall, dass $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ist, d. h. der Fall, dass ein Wendepunkt der Berührungspunkt wird. Alsdann wird erst das Glied $\frac{1}{6}\frac{d^3y}{dx^3}h^3$ bestimmend für das Vorzeichen, und dieses Glied wechselt sein Vorzeichen für verschiedene Werthe von h: bei diesen Punkten einer Curve also schneidet die Tangente die Curve.

Eine ganz ähnliche Betrachtung machen wir nun für die Fläche. Die Gleichung der Tangentialebene im Punkte $x\,y\,z$ lässt sich nach § 35. so schreiben: $\zeta - z = p\ (\xi - x) + q\,(\eta - y)$. Folglich wird die z Coordinate dieser Ebene für die Abscissen $x + h$, $y + k$ folgende: $Z_1 = z + p.\,h + q.\,k$. Das entsprechende z der Fläche, oder Z, findet man, wenn man in die Function $f\,(x, y)$ einsetzt $x + h$ statt x und $y + k$ statt y. Man bekommt alsdann nach dem Taylor'schen Lehrsatze für zwei Variabeln folgende Gleichung:

$$Z = z + (p.h + q.k) + \tfrac{1}{2}\,(rh^2 + 2shk + tk^2) + \cdots\cdots,$$

wenn wir uns der bekannten Euler'schen Bezeichnungsart partieller Differentialquotienten einer Function zweier Veränderlichen bedienen. Bilden wir nun wieder die Differenz $Z - Z_1$, so erhalten wir dafür eine Reihe, welche beginnt mit $\frac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2)$, einem Gliede, welches wegen der beliebigen Kleinheit von h und k vorzeichenbestimmend wird für die ganze Reihe, deren nachfolgende Glieder in Beziehung auf h und k von der dritten und höheren Ordnungen sind. Nach dem Lemma des vorigen Paragraphen ändert nun dieses Glied sein Zeichen, sobald $rt - s^2$ negativ ist; ist jedoch $rt - s^2$ positiv oder Null, so kann der Ausdruck nicht sein Vorzeichen ändern. Ist jedoch $rt - s^2$ deshalb Null, weil r, s, t einzeln gleich Null sind, dann gehört der Fall unter die erste Kategorie: da alsdann das Glied, welches die zweiten Dimensionen von h und k enthält, gänzlich verschwindet, so nimmt das folgende von der dritten Dimension dessen Platz ein, und dieses ändert allerdings sein Vorzeichen für verschiedene Werthe von h und k. Diesen Ausnahmefall abgerechnet, ergiebt sich also als Resultat unsrer Untersuchung:

Die Fläche $z = f\,(x, y)$ wird von der Tangentialebene berührt oder geschnitten, je nachdem $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x.\,\partial y}\right)^2$ grösser als Null ist oder kleiner. Der Grenzfall, dass diese Differenz gleich Null ist, gehört zum ersten.

Anmerkung. Diese Untersuchung bietet viel Analoges mit der über Maxima und Minima, und in der That giebt es eine Wendung, um jene auf diese zurückzuführen. Wenn man von einer Function einer Variabeln das Maximum oder Minimum sucht, so

löst man die Gleichung $F'(x) = 0$ und hat diese Gleichung Wurzeln, so finden im Allgemeinen Maxima oder Minima statt: nur der Fall ist ausgenommen, dass für einen Wurzelwerth gleichzeitig $F''(x)$ verschwindet. Allein bei einer Function zweier Variabeln ist die Sache ganz anders. Hier hat man zunächst die beiden Gleichungen $f'(x) = 0$ und $f'(y) = 0$ aufzulösen: wenn man aber auch eine Lösung dieses Systemes hat, so ist noch nicht die nothwendige Folge davon, dass ihr ein Maximum oder Minimum entspricht: vielmehr ist der Fall, dass kein Maximum oder Minimum für diese Werthe eintrifft, ebenso häufig wie der als regelmässig angesehene Fall, dass eins stattfindet. — Dass die Theorie der Tangenten ganz mit dieser Untersuchung zusammenfällt, sieht man daraus, dass man die Aufgabe: in einem Punkte einer Curve eine Tangente zu ziehen, auch so stellen kann: durch diesen Punkt eine Abscissenaxe zu legen, so dass die Ordinate des Punktes ein Minimum wird. Jede andere Linie durch diesen Punkt gelegt macht zwar auch die Ordinate des Punktes gleich Null, da aber die Ordinaten auf der einen Seite des Punktes alsdann das entgegengesetzte Zeichen von denen auf der andern Seite haben, so ist die Ordinate des gegebenen Punktes eben kein Minimum. Hat man eine Fläche, die ganz und gar concav ist, wie z. B. die Kugel, so lässt sich die Aufgabe, eine Tangentialebene in einem Punkte dieser Fläche zu legen, ganz ähnlich aussprechen, nämlich so: eine Ebene (der xy) dort so zu legen, dass dieser Punkt das kleinste z hat. Bei andern Flächen ist dies aber unmöglich, nämlich bei denen, wo die Tangentialebene die Fläche schneidet. Die Theorie der Tangentialebenen fällt also nicht mit der der Maxima und Minima zusammen.

§ 40.

Unser Kriterium dafür, ob die Tangentialebene ihre Fläche schneidet oder nicht, gilt für die Form der Gleichung der Fläche $z = f(x, y)$. Ist jedoch die Gleichung in der Form $F(x, y, z) = 0$ gegeben, so ändert sich das Kriterium natürlich der Form nach. Um dies neue Kriterium aufzustellen, setzen wir folgende Bezeichnungen für die Differentialquotienten der Function F fest:

$\frac{\partial F}{\partial x} = P \; \frac{\partial F}{\partial y} = Q \; \frac{\partial F}{\partial z} = R$ und die zweiten $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = L \; \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = M \; \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = N$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y . \partial z} = L' \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z . \partial x} = M' \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x . \partial y} = N'.$$

Dann haben wir nur die Differentialquotienten $p\ q\ r\ s\ t$ in diesen neuen Bezeichnungen auszudrücken und die Differenz $rt - s^2$ zu bilden.

Differentiiren wir zunächst die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ partiell

nach x, so zwar, dass wir z als Function von x, und y als constant ansehen, so erhalten wir: $P + R.p = 0$ oder $p = -\frac{P}{R}$, und ebenso finden wir, wenn wir y als unabhängige Variable, z als seine Function und x als constant ansehen: $q = -\frac{Q}{R}$.

Differentiiren wir diese beiden Gleichungen nochmals in derselben Weise wie vorhin $F = 0$, so finden wir $\frac{\partial p}{\partial x}$, d. i.

$$r = -\frac{R(L + M'.p) - P(M' + N.p)}{R^2} = -\frac{R\left(\frac{LR - M'P}{R}\right) - P\left(\frac{M'R - NP}{R}\right)}{R^2}$$

oder

$$-rR^3 = LR^2 - 2M'PR + NP^2.$$

Ebenso $\frac{\partial q}{\partial y}$, d. i. t. Man erhält dafür

$$-tR^3 = MR^2 - 2L'QR + NQ^2.$$

Endlich findet man $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = s$. Dafür hat man ähnlich

$$-sR^3 = N'R^2 - (M'Q + L'P)R + NPQ.$$

Bildet man nun $rt - s^2$, so findet man dafür

$$R^4(rt - s^2) = P^2(MN - L'^2) + Q^2(NL - M'^2) + R^2(LM - N'^2)$$
$$+ 2QR(M'N' - LL') + 2RP(N'L' - MM') + 2PQ(L'M' - NN').$$

Die Tangentialebene berührt also, wenn die rechte Seite dieser Gleichung $\geqq 0$ ist; ist sie < 0, so schneidet die Tangentialebene die Fläche.

Man kann die rechte Seite dieser Gleichung noch etwas bequemer fürs Gedächtnis schreiben. Es ist

$$\begin{vmatrix} L & N' & M' \\ N' & M & L' \\ M' & L' & N \end{vmatrix} = \varDelta = LMN - LL'^2 - MM'^2 - NN'^2 + 2L'M'N',$$

also wird

$$R^4.(rt - s^2)$$
$$= P^2.\frac{\partial \varDelta}{\partial L} + Q^2.\frac{\partial \varDelta}{\partial M} + R^2.\frac{\partial \varDelta}{\partial N} + QR.\frac{\partial \varDelta}{\partial L'} + RP.\frac{\partial \varDelta}{\partial M'} + PQ.\frac{\partial \varDelta}{\partial N'}.$$

4. Osculation der Flächen.

§ 41.

Von der Berührung der Flächen durch eine Ebene wenden wir uns jetzt zu der der Flächen unter einander, d. h. zu der Theorie

der Osculation der Flächen. Recapituliren wir zunächst das, was über die Osculation der Curven gesagt ist.

Man sagt, zwei Curven $y = f(x)$ und $y = \varphi(x)$, welche einen Punkt gemeinschaftlich haben, haben in ihm eine Berührung n^{ter} Ordnung, wenn für diesen Punkt nicht nur die Coordinaten dieselben sind, sondern auch die n ersten Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\ldots, \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Der erste Gedanke, der sich bei dieser Definition darbietet, ist die Frage, ob ein solcher Zusammenhang zweier Curven nicht etwas blos Aeusserliches ist, ob die Gleichheit dieser Differentialquotienten nicht blos von einer zufälligen Lage der Coordinatenaxen abhängt? Dies ist aber nicht der Fall; sondern: Wenn diese Uebereinstimmung der Differentialquotienten für zwei Curven in einem Coordinatensysteme stattfindet, so findet sie in jedem andern Systeme auch statt. Wir schliessen dabei blos die Lage der Coordinatenaxen aus, dass die Tangente der Curve in dem betrachteten Punkte die Ordinaten- oder y-Axe sei, x-Axe dagegen kann sie sein. Es lässt sich nämlich beweisen, dass wenn der ausgeschlossene Fall nicht ausgeschlossen wird, man alle Differentialquotienten vom ersten bis zum n^{ten} gleich ∞ erhält. Alsdann ist also von einer Vergleichung nicht mehr die Rede. Für rechtwinklige Coordinaten übersieht man die Richtigkeit hiervon sofort: denn in einem solchen System bedeutet $\frac{dy}{dx}$ die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die Tangente, hier also die y-Axe, mit der x-Axe bildet. Dieser ist aber ein rechter; es wäre also bei dieser Annahme $\frac{dy}{dx} = \infty$ und demnach nach einem bekannten Satze auch alle übrigen Differentialquotienten unendlich gross. Ist also diese einzige Lage der Coordinatenaxen ausgeschlossen, so gilt unser Satz für alle übrigen, was wir jetzt beweisen wollen.

Gegeben sei, dass für die beiden Curven $y = f(x)$ und $y = \varphi(x)$ im System x, y für einen bestimmten Punkt, dessen Abscisse a ist, folgende Gleichungen bestehen

$$f(a) = \varphi(a),\ f'(a) = \varphi'(a),\ f''(a) = \varphi''(a), \cdots\cdots, f^{(n)}(a) = \varphi^{(n)}(a).$$

Wir führen jetzt andere Coordinaten ein vermittelst der Gleichungen

$$y = \lambda Y + \mu X + \nu,\ \ x = \lambda' Y + \mu' X + \nu';$$

dadurch wird die Gleichung der ersten Curve

$$\lambda Y + \mu X + \nu = f(\lambda' Y + \mu' X + \nu')$$

oder wie wir der Kürze wegen schreiben wollen $\lambda Y + \mu X + \nu = f(x)$.

Differentiiren wir diese Gleichung nach x ein-, zwei-, drei-, u. s. w. mal, so wird:

$$\lambda \frac{dY}{dX} + \mu = f'(x)\left(\lambda' \frac{dY}{dX} + \mu'\right), \ \lambda \frac{d^2Y}{dX^2} = f''(x)\left(\lambda' \frac{dY}{dX} + \mu'\right)^2 + f'(x)\lambda' \frac{d^2Y}{dX^2},$$

$$\lambda \frac{d^3Y}{dX^3} = f'''(x)\left(\lambda' \frac{dY}{dX} + \mu'\right)^3 + 3f''(x)\left(\lambda' \frac{dY}{dX} + \mu'\right)\lambda' \frac{d^2Y}{dX^2}$$
$$+ f'(x)\lambda' \frac{d^3Y}{dX^3}, \text{ u. s. w.}$$

Aus diesen Gleichungen kann man successive die Differentialquotienten für die erste Curve finden. Ebenso leitet man die für die andere Curve ab, welche man auch aus diesen erhalten kann, indem man blos f in φ verändert. Man hat nun daraus die Werthe dieser Differentialquotienten für den gemeinschaftlichen Punkt, dessen Coordinaten a und $f(a) = \varphi(a)$ sind, zu bilden. Für diesen Punkt ist aber $f'(a) = \varphi'(a)$, $f''(a) = \varphi''(a)$, $f'''(a) = \varphi'''(a)$ u. s. w., und da die oben gefundenen Differentialquotienten von Y nach X sich nur durch diese Differentialquotienten von $f(u)$ und $\varphi(u)$ unterscheiden, so sind sie mit ihnen zusammen einander gleich. Es geht also hieraus hervor, dass zwar für die andern Punkte die beiden Curven verschiedene Differentialquotienten haben (denn für diese ist weder $f(u) = \varphi(u)$, noch die Differentialquotienten dieser beiden Functionen einander gleich); dass aber für den Punkt, wo die Differentialquotienten ursprünglich, d. h. in dem gegebenen Systeme gleich sind, sie auch noch nach jeder beliebigen Transformation der Coordinaten einander gleich sind (die einzige oben erwähnte Lage der y Axe ausgenommen): die Gleichheit der Differentialquotienten für einen zwei Curven gemeinschaftlichen Punkt hängt also nicht ab von der Wahl der Coordinaten.

Ganz dieselbe Betrachtung kann man für die Flächen machen, und ebenso den Satz beweisen:

Wenn für zwei Flächen, deren Gleichungen sind $z = f(x, y)$, $z = \varphi(x, y)$, die partiellen Differentialquotienten bis zu einer bestimmten Ordnung gleich sind, so ist diese Gleichheit unabhängig von der Wahl der Coordinaten.

Anmerkung. Die Richtigkeit des so eben bewiesenen Satzes lässt sich für die Curven ungemein einfach übersehen. Wenn nämlich zwei Curven zwei Punkte gemeinschaftlich haben, die einander unendlich nahe liegen, so wird der Differentialquotient in beiden derselbe sein; sind drei unendlich nahe Punkte beiden Curven gemeinschaftlich, so werden die beiden ersten Differentialquotienten beider Curven für diesen Punkt einander gleich sein u. s. f. Das Uebereinstimmen von n Differentialquotienten kommt also darauf hinaus,

dass $(n+1)$ auf einander folgende Punkte beiden Curven gemeinschaftlich sind: diese Eigenschaft aber hängt nicht ab von der Wahl der Coordinaten. — Für die Flächen würde diese Betrachtung schwieriger sein.

Erklärung. Wenn für einen Punkt zweier Flächen nicht blos die Coordinaten, sondern alle Differentialquotienten vom ersten bis zum n^{ten} bezüglich gleich sind, so haben die beiden Flächen eine Berührung der n^{ten} Ordnung.

Folgerung. Wenn von drei Flächen A, B, C, die einen Punkt gemeinschaftlich haben, B mit A in diesem Punkte eine Berührung der n^{ten}, und C mit A eine Berührung der n'^{ten} Ordnung hat, wo $n' < n$ ist, so liegt B näher an A. Denn entwickelt man die z Coordinate der nahe gelegenen Punkte für die Flächen A, B, C, und nimmt die Differenzen dieser Ausdrücke, einmal des für die Fläche A von dem für die Fläche B, und dann von dem für die Fläche C, so wird die erste Differenz kleiner sein als die zweite, weil bei der ersten mehr Glieder zu Anfang wegfallen.

§ 42.

Nach dieser Erklärung kann man die Gleichung der Tangentialebene herleiten. Definirt man nämlich die Tangentialebene als diejenige Ebene, die mit der gegebenen Fläche $z = f(x, y)$ eine Berührung der ersten Ordnung gemein hat, so bedeutet dies: in der Gleichung der Ebene $\zeta - z = a(\xi - x) + b(\eta - y)$, welche durch den gegebenen Punkt der Fläche x, y, z geht, sollen die Constanten a und b so bestimmt werden, dass für diesen Punkt die partiellen ersten Differentialquotienten der Gleichung der Ebene bezüglich gleich werden den partiellen ersten Differentialquotienten der Gleichung der Fläche. Es muss also $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = a$, $\frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = b$ für den Punkt x, y, z oder $a = \frac{\partial z}{\partial x} = p$, $b = \frac{\partial z}{\partial y} = q$ sein; die Gleichung der Tangentialebene ist also $\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$.

In der Ebene fährt man nun so fort und sucht den Kreis, bei dem für einen ihm und der vorgelegten Curve gemeinschaftlichen Punkt der erste und der zweite Differentialquotient bezüglich gleich sind den beiden ersten Differentialquotienten der Fläche für diesen Punkt; und diese Aufgabe kann man sich stellen, weil die drei Constanten, welche in der Gleichung des Kreises vorkommen, sich immer so bestimmen lassen, dass erstens der Kreis durch einen bestimmten Punkt geht, dass zweitens der erste Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ einen bestimmten Werth hat und dass drittens auch der zweite Differential-

quotient $\frac{d^2 y}{d x^2}$ einen bestimmten Werth hat. Für den Raum spielt nun die Kugel keine solche Rolle. Ihre Gleichung enthält vier Constanten. Diese kann man zwar so bestimmen, dass erstens der Gleichung der Kugel ein gewisser Punkt genügt, dann, dass die beiden ersten Differentialquotienten auch gegebene Werthe haben: wollte man aber nun auch noch die zweiten Differentialquotienten der vorgelegten Fläche und der Kugel gleich machen, so würden zu den ersten drei Bedingungen noch drei hinzukommen, man erhielte also zur Bestimmung der vier Constanten in der Gleichung der Kugel 6 Gleichungen: im Allgemeinen ist es folglich unmöglich, durch einen Punkt einer Fläche eine Kugel zu legen, welche in diesem Punkt eine Berührung zweiter Ordnung hat.

Andrerseits ist hierzu auch die allgemeine Gleichung der Flächen zweiter Ordnung untauglich, denn diese enthält 9 Constanten. Es giebt folglich unzählig viele Flächen zweiten Grades, die an einem bestimmten Punkte eine Berührung zweiter Ordnung haben. Von diesen werden wir natürlich die wählen, deren Gleichung die möglichst einfachste ist.

§ 43.

Lehrsatz. Wenn zwei Flächen in einem Punkte a eine Osculation der n^{ten} Ordnung haben und man durch den Punkt eine Ebene legt, so haben die beiden Curven, welche sie aus den beiden Flächen ausschneidet, wenigstens eine Osculation der n^{ten} Ordnung.

Beweis. Wir wählen den Punkt a zum Anfangspunkt und legen sonst die Coordinatenaxen beliebig, nur so, dass die z-Axe keine Tangente sei. Wir schneiden alsdann die Flächen durch eine Ebene, die durch die x- und die z-Axe hindurchgeht, also selbst ganz beliebig ist wegen der beliebigen Lage dieser beiden Axen; wir haben also in den Gleichungen beider Flächen $y = 0$ zu setzen. Nach der Voraussetzung bestehen für beide Flächen die Bedingungen, dass für den Anfangspunkt die partiellen Differentialquotienten von der ersten bis zur n^{ten} Ordnung bei beiden Flächen gleich sind. Sind nun die Gleichungen der Flächen $z = f(x, y)$ und $z = \varphi(x, y)$, so sind also:

$$f'(x) = \varphi'(x),\ f'(y) = \varphi'(y);\ f''(x) = \varphi''(x),\ f''(x, y) = \varphi''(x, y),$$
$$f''(y) = \varphi''(y);\ \text{u. s. w.}$$

Um zu den zu untersuchenden beiden Curven überzugehen, haben wir hierin $y = 0$ setzen, wodurch die Differentiationen nach y wegfallen: es bestehen folglich für die beiden Curven folgende n Glei-

chungen: $f'(x) = \varphi'(x)$, $f''(x) = \varphi''(x)$; u. s. w. bis $f^{(n)}(x) = \varphi^{(n)}(x)$, in welchen man schliesslich x und $z = 0$ zu setzen hat; d. h. die beiden Curven haben im Anfangs- oder gegebnen Punkte eine Osculation der n^{ten} Ordnung.

§ 44.

In allen Fragen nun, wo man voraussieht, dass von einer Fläche nur die Differentialquotienten bis zur n^{ten} Ordnung in Beziehung auf einen Punkt derselben gebraucht werden, kann man, wie aus dem Vorhergehenden klar ist, statt der gegebenen Fläche irgend eine beliebige andere setzen, vorausgesetzt, dass diese zweite mit der ersten eine Osculation n^{ter} Ordnung hat. Ueberall z. B., wo es blos auf die Richtung der Tangente ankommt, kann man statt einer vorgelegten Fläche die Tangentialebene setzen. Nach dieser Vorerinnerung gehen wir über zu der Untersuchung der Krümmungen, welche die verschiedenen Schnitte einer Fläche haben. Wenn man durch einen gegebenen Punkt a einer Fläche alle möglichen Schnitte legt, so ist die Frage: Auf welche Weise kann man die Krümmungsradien aller dieser Schnitte aufs einfachste berechnen? Die Anzahl dieser Schnitte ist doppelt unendlich gross. Denn denkt man sich eine Tangente ab, die durch den Punkt a geht, so kann man durch sie unzählig viele Schnitte legen, welche im Punkte a sich sämmtlich berühren werden. Nun giebt es aber wiederum unendlich viele Tangenten ab; also hat man unendlich mal unendlich viele Schnitte. (Unter den Schnitten, welche durch dieselbe Tangente ab gelegt sind, zeichnet sich einer aus, nämlich der, welcher normal steht auf der Tangentialebene oder durch die Normale gelegt ist: ihn nennt man Normalschnitt.)

Unsre Untersuchung zerlegt sich hiernach in zwei Theile:

Denkt man sich erstens durch eine Tangente ab eine Ebene gelegt, und dreht sie successive, wodurch man immer andre Schnittflächen bekommt: wie ändert sich die Krümmung von Schnitt zu Schnitt? Denkt man sich zweitens durch die Normale eine Ebene gelegt, und diese Ebene herumgedreht: wie ändert sich hier der Krümmungsradius von Schnitt zu Schnitt? Die erste dieser beiden Fragen rührt her von (dem frz. Ingen.-Offiz.) Meusnier, die zweite von Euler.

Beide lassen sich mit wenigen Strichen Rechnung absolviren. Man denke sich zu dem Zwecke den Punkt a der Fläche, um den es sich handelt, als Anfangspunkt der Coordinaten, die Normale als z Axe und demnach die Tangentialebene als Ebene der xy. Durch

diese Wahl der Coordinaten geht die Gleichung der Tangentialebene $\zeta - z = p(\xi - x) + q(y - \eta)$ über in $\zeta = 0$ als Coordinatenebene der xy, und da der Berührungspunkt Anfangspunkt also $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ist, so ist dies nur möglich, wenn $p = 0$ und $q = 0$ ist. Nicht ebenso lassen sich die Werthe der zweiten Differentialquotienten r, s, t bestimmen, sie sind jedoch constant und wir wollen sie resp. mit α, β, γ bezeichnen. Wir machen nun für unsre Untersuchung von der zu Anfang dieses Paragraphen aufgestellten Bemerkung Gebrauch und substituiren statt der vorliegenden Fläche folgende Fläche zweiten Grades: $z = \frac{1}{2}(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2)$, welche im Allgemeinen eins der beiden Paraboloide ist, und, offenbar durch den Anfangspunkt gehend, mit der gegebenen Fläche eine Osculation zweiter Ordnung hat. Dies letztere ersieht man daraus, dass die ersten Differentialquotienten dieser Fläche

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \alpha x + \beta y \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \beta x + \gamma y$$

für den gegebenen Punkt ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$) beide Null, die zweite dagegen $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \alpha$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x . \partial y} = \beta$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \gamma$ werden: wie bei der vorgelegten Fläche. Da nun in der Formel für den Krümmungsradius einer ebenen Curve nur die Differentialquotienten der beiden ersten Ordnungen vorkommen, so können wir diese Fläche zweiten Grades statt der vorgelegten setzen.

§ 45.

Der Meusnier'sche Satz. Legt man durch eine Tangente einer Fläche zwei Ebenen, von denen die eine normal zur Tangentialebene steht, die andre mit ihr den Winkel φ bildet, so sind ihre beiden Krümmungsradien ϱ und ϱ_1 durch die Gleichung verbunden $\varrho_1 \doteq \varrho \sin \varphi$.

Denn mit der zu Ende des vorigen Paragraphen festgesetzten Lage der Coordinaten, siehe Fig. 14, kann man jeden Normalschnitt in dem gegebenen Punkte sich erzeugt denken durch eine specielle Lage der xz Ebene, indem über die Richtung der Axe der x nichts angegeben worden ist. Betrachtet man nun einen solchen Schnitt, so erhält man seine Gleichung, wenn man die Gleichung der xz Ebene oder $y = 0$ mit der der vorgelegten Fläche oder, was dasselbe ist, mit der sie im vorliegenden Punkte osculirenden Fläche

$$z = \frac{1}{2}(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2)$$

verbindet; man findet also $z = \frac{1}{2}\alpha x^2$. Der Ausdruck für den Krümmungsradius wird also

$$\varrho = \frac{\left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}} = \frac{(1 + \alpha^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}{\alpha}$$

oder für $x = 0$, d. h. in dem vorliegenden Punkte $\varrho = \frac{1}{\alpha}$. Legen wir einen beliebigen zweiten Schnitt durch die x Axe, der nicht normal ist zur Tangentialebene, sondern mit ihr den Winkel φ bilde, so verlegen wir zunächst das Coordinatensystem in der Ebene der yz:

$$z = z_1 \sin \varphi - y_1 \cos \varphi \quad y = z_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi.$$

Dies setzen wir in die Gleichung des zu Hilfe genommenen Paraboloids ein, setzen aber gleich $y_1 = 0$, weil wir den Schnitt betrachten wollen, der durch die Ebene der xz_1 hervorgebracht wird:

$$z_1 \sin \varphi = \tfrac{1}{2} (\alpha x^2 + 2 \beta x z_1 \cos \varphi + \gamma z_1^2 \cos^2 \varphi).$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} \sin \varphi = \alpha x + \beta z_1 \cos \varphi + (\beta x \cos \varphi + \gamma z_1 \cos^2 \varphi) \frac{\partial z_1}{\partial x}$$

und

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} \sin \varphi = \alpha + \beta \cos \varphi \frac{\partial z_1}{\partial x} + (\beta \cos \varphi + \gamma \frac{\partial z_1}{\partial x} \cos^2 \varphi) \frac{\partial z_1}{\partial x}$$
$$+ (\beta x \cos \varphi + \gamma z_1 \cos^2 \varphi) \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}.$$

Um die Ausdrücke für $\frac{\partial z_1}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}$ für den Anfangspunkt der Coordinaten zu haben, setzen wir jetzt $x = 0$ und $z_1 = 0$. Dadurch wird $\frac{\partial z_1}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} = \frac{\alpha}{\sin \varphi}$. Somit wird der Krümmungsradius dieses Schnittes $\varrho_1 = \frac{\sin \varphi}{\alpha}$. Also wird schliesslich $\varrho_1 = \varrho . \sin \varphi$.

Bei der Kugel z. B. kennt man ohne Weiteres den Krümmungsradius jedes Normalschnittes: er ist so gross wie der Kugelradius r. Legt man durch denselben Punkt a der Kugel und dieselbe Tangente ab, durch welche der Normalschnitt gelegt ist, eine Ebene, welche mit der Tangentialebene den Winkel φ bildet, so übersieht man aus der bekannten Eigenschaft der Kugel, dass nämlich die Normale vom Mittelpunkt der Kugel auf diesen zweiten Schnitt gefällt, dessen Mittelpunkt trifft und mit dem Radius des Normalschnittes den Winkel φ bildet, — so übersieht man, dass $\varrho_1 = \varrho \sin \varphi$ ist, in dem rechtwinkligen Dreiecke, dessen Hypotenuse ϱ und dessen beide Katheten jene Normale und ϱ_1 sind.

Denken wir uns also in einer beliebigen Fläche alle möglichen Schnitte durch eine Tangente eines Punktes gelegt, und die Krümmungskreise aller dieser Schnitte construirt, so werden sie alle auf

einer Kugel liegen, welche den Krümmungskreis des Normalschnittes zum Meridian hat. Also: Legt man durch eine Tangente einer Fläche alle möglichen Schnitte, so bestimmen die Krümmungskreise derselben eine Kugel, deren Radius der Krümmungsradius des Normalschnittes ist.

Anmerkung. Bisweilen kennt man einen schiefen Schnitt und kann somit den normalen daraus bestimmen. Legt man nämlich durch einen Punkt im Mantel eines schiefen Kegels eine Ebene parallel der Grundfläche, so ist diese ein Kreis, dessen Radius man leicht finden kann. Legt man alsdann den Normalschnitt in demselben Punkte, so kann man dessen Krümmung aus der des schiefen Schnittes berechnen.

§ 46.

Der Euler'sche Satz. Legt man in einem Punkte einer Fläche sämmtliche Normalebenen, und bezeichnet man den grössten Krümmungsradius unter den Radien dieser Schnitte mit r_1, den kleinsten mit r_2, so ist der Krümmungsradius eines dritten Schnittes, dessen Tangente mit der x Axe den Winkel φ bildet, mit diesen beiden ersten durch die Gleichung verbunden: $\frac{1}{r} = \frac{\cos^2\varphi}{r_2} + \frac{\sin^2\varphi}{r_1}$.

Behalten wir die vorige Lage des Coordinatensystems bei, drehen aber die xy Ebene so, dass in dem Ausdruck

$$z = \tfrac{1}{2}(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2)$$

das doppelte Product verchwindet, also die Grösse $\beta = 0$ sei (was wir immer können), so haben wir jetzt die Normalschnitte des folgenden Paraboloids zu untersuchen: $z = \frac{1}{2}(\alpha x^2 + \gamma y^2)$. Der Schnitt, der durch die Ebene der zy gebildet wird, habe den Krümmungsradius r_1, der zx Schnitt den Radius r_2: dann ist nach dem vorigen Paragraphen $r_1 = \frac{1}{\gamma}$, $r_2 = \frac{1}{\alpha}$. Ein dritter Schnitt, welcher auch durch die z Axe geht, sei so gelegt, dass die Tangente, welche er aus der Tangentialebene des vorliegenden Punktes ausschneidet, mit der x Axe den Winkel φ bildet. Dann machen wir, um seinen Krümmungsradius r zu finden, folgende Coordinatentransformation

$$x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi \quad y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi;$$

diese Werthe setzen wir in die Gleichung des Paraboloids ein, und leiten alsdann daraus den Schnitt der $x'z$ Ebene her, indem wir $y' = 0$ setzen. Wir erhalten dafür $z = \frac{1}{2}x'^2(\alpha\cos^2\varphi + \gamma\sin^2\varphi)$. Demnach wird der Krümmungsradius dieses Schnitts im Punkte $(x' = 0,\ z = 0)$ $r = \frac{1}{\alpha\cos^2\varphi + \gamma\sin^2\varphi}$, und setzt man hierin für α

und γ ihre Werthe, so erhält man

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos^2\varphi}{r_2} + \frac{\sin^2\varphi}{r_1}.$$

Es ist nun noch nachzuweisen, dass unter allen r das r_1 den grössten, r_2 den kleinsten Werth hat. Zu dem Zwecke schreiben wir die Gleichung etwas anders, indem wir statt der Krümmungsradien ihre umgekehrten Werthe, die Krümmungen einführen: $\frac{1}{r} = k$, $\frac{1}{r_2} = k_2$, $\frac{1}{r_1} = k_1$. Es wird also $k = k_2 \cos^2\varphi + k_1 \sin^2\varphi$. Diese Formel gilt ganz allgemein, α und γ oder k_2 und k_1 mögen Zeichen haben wie sie wollen. In der folgenden Untersuchung wollen wir annehmen, dass zunächst α und γ dasselbe Zeichen haben, oder wie wir sogar annehmen können, dass beide positiv seien (denn wären beide negativ, so hätten wir nur die Lage der negativen z Axe als positiv anzusehen). Von den beiden Krümmungen k_1 und k_2, welche somit beide positiv sind, wird also eine grösser sein; es sei die Differenz $k_2 - k_1$ positiv. Dann können wir die Gleichung

$$k = k_2 \cos^2\varphi + k_1 \sin^2\varphi$$

folgendermassen schreiben: $k = k_2 - (k_2 - k_1)\sin^2\varphi$. Dieser Ausdruck wird den grössten Werth erreichen, wenn $\varphi = 0$ ist, d. h. wenn die zx Ebene die schneidende ist: alsdann ist $k = k_2$. Also ist k_2 die grösste Krümmung, d. h. r_2 der kleinste Krümmungsradius. Schreibt man die Gleichung so: $k = k_1 + (k_2 - k_1)\cos^2\varphi$, so erreicht er offenbar den kleinsten Werth für $\varphi = 90^0$, d. h. für die yz Ebene; es ist alsdann $k = k_1$. k_1 ist also die kleinste Krümmung, r_1 der grösste Krümmungsradius. — Spricht man nicht blos von positiven Krümmungsradien, sondern legt ihnen ein Zeichen bei, welches man darauf bezieht, ob sie nach der einen oder andern Seite von der Curve aus liegen, so gilt unser Satz auch noch, wenn α und γ verschiedene Zeichen haben: der Euler'sche Satz ist also bewiesen.

Die Ebenen, welche den grössten Krümmungsradius r_1 und den kleinsten r_2 enthalten, stehen auf einander normal: denn sie sind bei unsrer Lage der Coordinaten die yz- und die xz-Ebene. Für den Fall, dass α und γ verschiedene Zeichen haben, dass also (§ 39.) die Tangentialebene die Fläche nothwendigerweise schneidet, wird der Ausdruck $\alpha\cos^2\varphi + \gamma\sin^2\varphi$ für zwei Werthe von φ Null: $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{-\frac{\alpha}{\gamma}}$; es giebt also bei allen solchen Flächen zwei Schnitte, die symmetrisch zu beiden Seiten der x Axe liegen, deren Krümmung Null, d. h. deren Krümmungsradius unendlich ist, oder: Auf den Flächen, die durch ihre Tangentialebene geschnitten werden, haben in allen Punkten, wo dies Schneiden stattfindet, die beiden Hauptnormalschnitte dort einen Wendepunkt; beim

einfächrigen Hyperboloid ist dieser Wendepunkt der Scheitel eines Systems zweier geraden Linien, die ganz auf der Fläche liegen, und welche hier eben die beiden Hauptnormalschnitte sind.

Anmerkung 1. Man kann das Resultat des Euler'schen Satzes graphisch leicht fixiren, siehe Fig. 15. Denken wir uns zunächst, dass α und β gleiches Zeichen haben. Alsdann stellen wir uns eine Ellipse vor, deren eine Halbaxe gleich sei dem Zahlenwerthe von $\sqrt{r_1}$, die andere Halbaxe gleich dem Zahlenwerthe von $\sqrt{r_2}$. Wir nehmen ferner irgend einen Halbmesser d, welcher mit der zweiten oder kleinen Halbaxe den Winkel φ macht: dann sind die Coordinaten seines Endpunktes, wenn man sie auf die beiden Halbaxen als Coordinatenaxen bezieht, $d \cos \varphi$ und $d \sin \varphi$. Da sie der Gleichung der Ellipse genügen müssen, so hat man

$$\frac{d^2 \cos^2 \varphi}{r_2} + \frac{d^2 \sin^2 \varphi}{r_1} = 1;$$

es ist also, wenn wir diese Gleichung mit der Euler'schen Formel zusammenhalten, r gleich dem Zahlenwerth von d^2. Wir können diesen Satz so aussprechen:

Beschreibt man auf der Tangentialebene einer Fläche eine Ellipse, die zum Mittelpunkt den Berührungspunkt hat, deren Hauptaxen nach denjenigen Tangenten gerichtet sind, welche die beiden Schnitte mit der grössten und kleinsten Krümmung bedingen, und deren Grösse gleich ist resp. den Quadratwurzeln aus diesen beiden Krümmungsradien: so ist der Krümmungsradius irgend eines Normalschnitts in jenem Punkte der Fläche, der die Ellipse natürlich in einem Durchmesser schneiden wird, gleich dem Quadrat der Hälfte dieses Durchmessers. Oder: Legt man durch die Normale einer Fläche ein Ebenenbüschel, welches die Fläche in unzählig vielen Curven schneiden wird, die Tangentialebene in ebensovielen Tangenten, und trägt man auf jede Tangente vom gemeinschaftlichen Mittelpunkte aus die Quadratwurzel aus dem Krümmungsradius der gleichzeitig mit ihr ausgeschnittenen Curve auf, so liegen die Endpunkte dieser Längen in einer Ellipse.

Haben α und γ entgegengesetztes Zeichen, so erhält man analoge Sätze, nur statt der Ellipse ein System von Haupt- und Nebenhyperbel: $\frac{x^2}{r_2} - \frac{y^2}{r_1} = 1$, $\frac{x^2}{r_2} - \frac{y^2}{r_1} = -1$.

Anmerkung 2. Dies ist Alles, was über die Krümmung der Schnitte an Sätzen mitzutheilen ist. Man sieht aus ihnen, dass man, um die Krümmung irgend eines ebenen Schnittes einer Fläche zu finden, nur die Kenntnis zweier ganz bestimmten Normalschnitte bedarf, welche man die Hauptschnitte nennt, aus welchen man zu-

nächst mittelst des Euler'schen Satzes die Krümmung jedes andern Normalschnittes und alsdann mittelst des Meusnier'schen die des vorgelegten schiefen Schnittes zu berechnen hat.

Man würde aber dazu, wollte man anders die bisherigen Formeln unmittelbar anwenden, erst Coordinatentransformationen zu machen haben. Ist z. B. die Krümmung eines seiner Richtung nach gegebenen schiefen Schnittes eines Ellipsoids zu berechnen, so hätte man zunächst die Gleichung des Ellipsoids so zu transformiren, dass der gegebene Punkt Anfangspunkt wird; zweitens das Coordinatensystem so umzuändern, dass die Normale in diesem Punkte z Axe wird und die Tangentialebene Ebene der xy. Dann hat man endlich diese xy Ebene so zu drehen, dass für den Anfangspunkt $\frac{\partial^2 z}{\partial x . \partial y} = 0$ wird. — Soll man diese Rechnungen in jedem einzelnen Falle immer von Neuem machen, so werden sie sehr weitläufig. Wir wollen daher, nachdem wir die beiden Lehrsätze über die Krümmungshalbmesser der verschiedenen Schnitte in einem Punkt entwickelt haben, die Ausdrücke für die Krümmungshalbmesser selbst entwickeln für eine beliebige Gleichung einer Fläche, das zu Grunde gelegte Coordinatensystem mag sein was für eins es wolle.

§ 47.

Wenn man unter x, y, z die Coordinaten einer Curve doppelter Krümmung versteht, und sie sich gegeben denkt als Function des Bogens s, dieser Bogen von irgend einem Anfangspunkte an gerechnet, und wenn diese Curve auf der Fläche $F(x, y, z) = 0 \cdots\cdots 1)$ liegen soll, so ist die Bedingung dafür (vgl. § 33), dass die drei Gleichungen, welche x, y, z als Functionen von s geben, so beschaffen sein müssen, dass sie, in die Gleichung (1) eingesetzt, diese zu der identischen Gleichung $0 = 0$ machen. Man darf folglich die Gleichung (1) nach s differentiiren, und erhält dadurch, wenn man die partiellen Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung von F mit den in § 40. angegebenen Buchstaben P, Q, R, L, M, N, L', M', N' und die Differentialquotienten von x, y, z nach s durch die entsprechenden accentuirten Buchstaben bezeichnet, folgende Gleichung:

$$(2)\ P.x' + Q.y' + R.z' = 0.$$

Die Bedeutung dieser Gleichung ist einfach die, dass die Normale einer Fläche rechtwinklig auf der Tangente jeder Curve steht, die durch den vermöge der Normale bestimmten Punkt der Fläche geht. Denn heissen die Winkel, welche eine solche Tangente mit den drei

Axen bildet, α, β, γ, so ist $x' = \cos\alpha$, $y' = \cos\beta$, $z' = \cos\gamma$, und nennt man die Winkel der Normale mit den drei Axen α', β', γ', so ist

$$\frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}} = \cos\alpha', \quad \frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}} = \cos\beta', \quad \frac{R}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}} = \cos\gamma'.$$

Die Gleichung (2) lässt sich also so schreiben:

$$\cos\alpha.\cos\alpha' + \cos\beta.\cos\beta' + \cos\gamma.\cos\gamma' = 0,$$

woraus das Obige sofort folgt. Differentiirt man ferner die Gleichung (1) zum zweiten Male nach s, so erhält man zunächst:

$$\frac{\partial P}{\partial s} = Lx' + N'y' + M'z' \text{ oder } = L\cos\alpha + N'\cos\beta + M'\cos\gamma;$$

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = N'\cos\alpha + M\cos\beta + L'\cos\gamma \text{ und}$$

$$\frac{\partial R}{\partial s} = M'\cos\alpha + L'\cos\beta + N\cos\gamma.$$

Danach ist das vollständige Differential der Gleichung (2) nach s folgendes:

$$(3)\quad P.x'' + Q.y'' + R.z'' + L\cos^2\alpha + M\cos^2\beta + N\cos^2\gamma$$
$$+ 2L'\cos\beta\cos\gamma + 2M'\cos\gamma\cos\alpha + 2N'\cos\alpha\cos\beta = 0.$$

Wenn man nun die Winkel, welche der Krümmungsradius r der im Eingange dieser Entwickelung genannten Curve mit den drei Axen bildet, mit $\lambda\ \mu\ \nu$ bezeichnet, und zwar so, dass der Krümmungsradius angenommen wird als vom Curvenpunkte nach dem Krümmungsmittelpunkte hin gehend, so ist

$$\cos\lambda = r.x'', \ \cos\mu = r.y'', \ \cos\nu = r.z'',$$

und man kann daher, wenn man sie mit r multiplicirt, die Gleichung (3) mit Anwendung dieser Bezeichnungen so schreiben:

$$(4)\quad P\cos\lambda + Q\cos\mu + R\cos\nu + rK = 0, \text{ wenn } K = L\cos^2\alpha + M\cos^2\beta$$
$$+ N\cos^2\gamma + 2L'\cos\beta\cos\gamma + 2M'\cos\gamma\cos\alpha + 2N'\cos\alpha\cos\beta.$$

Setzt man noch statt P, Q, R ihre Werthe durch die Winkel $\alpha'\ \beta'\ \gamma'$ ein: $P = \cos\alpha'\sqrt{P^2+Q^2+R^2}$, u. s. w., so wird

$$(5)\quad \sqrt{P^2+Q^2+R^2}\,\{\cos\alpha'\cos\lambda + \cos\beta'\cos\mu + \cos\gamma'\cos\nu\} + r.K = 0,$$

und endlich, wenn man die Klammergrösse

$$\cos\alpha'\cos\lambda + \cos\beta'\cos\mu + \cos\gamma'\cos\nu$$

durch k bezeichnet:

$$(6)\quad r = -\sqrt{P^2+Q^2+R^2}.\frac{k}{K}.$$

Aus dieser Gleichung ersieht man: Für einen Punkt der Fläche sind constant sämmtliche Differentialquotienten P, Q, R, u. s. w.,

so wie die Winkel der Normale α', β', γ'. Zieht man ferner durch diesen Punkt zwei Curven, welche in diesem Punkt eine gemeinschaftliche Tangente haben, so sind für diese Tangente auch die Winkel α, β, γ dieselben. Fixiren wir uns daher eine bestimmte Tangente in dem Punkte (x, y, z) der Curve, so bleibt in der Gleichung (6) für r die $\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}$ und der Nenner K constant; nur die Grösse k kann sich verändern. (Wir wollen von jetzt nur die ebenen Schnitte der vorliegenden Fläche betrachten; wollten wir jedweden Schnitt in Erwägung ziehen, so hätten wir in der folgenden Entwickelung nur überall statt Schnittebene Schmiegungsebene zu setzen.) Es bedeutet nun die Grösse k den Cosinus des Winkels, welchen die Normale des Punktes mit dem Krümmungshalbmesser eines Schnittes bildet. Dieser Ausdruck k ist demnach ein Maximum, wenn dieser Cosinus es ist, also wenn dieser Winkel Null ist oder wenn der Krümmungshalbmesser mit der Normale zusammenfällt. Dies ist aber nur dann möglich, wenn die Ebene des Schnittes durch die Normale geht, d. h. wenn der Schnitt Normalschnitt ist. Also ist in allen Schnitten, die durch dieselbe Tangente einer Fläche geführt werden, der Krümmungsradius des Normalschnitts der grösste, nämlich

$$(7) \quad \varrho = \frac{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}{K},$$

weil hier $k = 1$. Und hieraus geht unmittelbar die Formel hervor:

$$(8) \quad r = \varrho . \cos(r, \varrho).$$

Dies ist der Meusnier'sche Satz. Denn es ist der Winkel (r, ϱ) oder $(r, N) = 90^0 - (r, T)$, wenn N die Normale und T die fixirte Tangente des Punktes bedeuten (cf. § 45.).

§ 48.

Da wir somit die schiefen Schnitte absolvirt haben, betrachten wir nur noch die Normalschnitte. Die einzige Frage, die sich bei der Gleichung (7) darbietet, ist die: Welche Maxima oder Minima hat der Ausdruck

$$\frac{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}{L\cos^2\alpha + M\cos^2\beta + N\cos^2\gamma + 2L'\cos\beta\cos\gamma + 2M'\cos\gamma\cos\alpha + 2N'\cos\alpha\cos\beta}\,?$$

und zwar hat man bei Erledigung dieser Frage nur die Winkel α, β, γ als variabel anzusehen, da für die verschiedenen Normalschnitte, welche durch denselben Punkt gelegt sind, nur diese Winkel sich verändern. Dabei bestehen für diese Winkel folgende beide Gleichungen:

(1) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ und (2) $P.\cos\alpha + Q.\cos\beta + R.\cos\gamma = 0$.

Anmerkung. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass der vorliegende Ausdruck ein Maximum und ein Minimum hat, und dass die beiden Tangenten, für welche diese stattfinden, auf einander normal stehen. Zu dem Ende wollen wir die $\sqrt{\varrho}$ bezeichnen mit u.

Denken wir uns nämlich von dem Punkte $x\,y\,z$ der Fläche aus irgend eine gerade Linie gezogen, deren Länge sein möge

$$u^2 = \frac{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}{K},$$

wo in dem Nenner K die Winkel α, β, γ sich eben auf diese Linie beziehen, und nennen wir die Coordinaten des Endpunktes dieser Linie $\xi\,\eta\,\zeta$, so ist $\xi = u . \cos\alpha$, $\eta = u . \cos\beta$, $\zeta = u . \cos\gamma$, wenn wir dabei die Voraussetzung machen, dass der betrachtete Punkt auf der Fläche Mittelpunkt eines dem gegebenen parallelen Coordinatensystems ist. Befreit man nun die Gleichung für u^2 vom Nenner und setzt in ihn die Grössen $\xi\,\eta\,\zeta$ ein, so erhält man:

$$L\xi^2 + M\eta^2 + N\zeta^2 + 2L'\eta\zeta + 2M'\zeta\xi + 2N'\xi\eta = \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2},$$

d. h. wenn man so wie den ersten Strahl vom Punkte $x\,y\,z$ aus alle möglichen Strahlen von da aus zieht und auf ihnen die passenden Längen aufträgt, so bilden ihre Endpunkte eine Fläche zweiten Grades, für welche jener Punkt Mittelpunkt ist. Bei der Frage der Krümmungsradien handelt es sich aber nur um diejenigen unter diesen Strahlen, welche in der Tangentialebene des auf der Fläche betrachteten Punktes liegen: die Winkel α, β, γ beziehen sich nur auf Tangenten. Wir haben demnach auch, um die Werthe von ϱ zu bestimmen, nicht sämmtliche Diameter dieser Fläche zweiten Grades in Betracht zu ziehen, sondern nur diejenigen, welche in der Tangentialebene des betrachteten Punktes liegen. Diese Tangentialebene ist aber für die Hilfsfläche zweiten Grades eine Diametralebene, schneidet also aus ihr einen Kegelschnitt aus. Jeder Kegelschnitt mit einem Mittelpunkte hat eine grösste und eine kleinste Axe, welche auf einander normal stehen. Daraus folgt unmittelbar, dass der Ausdruck für ϱ (7) einen grössten und einen kleinsten Werth hat, und nicht mehr, und dass sie sich auf zwei Tangenten in der Tangentialebene beziehen, welche auf einander normal stehen. —

Um nun diesen Maximums- und Minimumswerth von ϱ zu finden, haben wir, weil der Zähler des Ausdrucks $\frac{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}{K}$ constant ist, nur den Nenner K zum Minimum oder Maximum zu machen. Schreiben wir statt der cos der drei Winkel α, β, γ der Kürze halber α, β, γ, so haben wir also die Grösse

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 + 2L'\beta\gamma + 2M'\gamma\alpha + 2N'\alpha\beta$$

zum Minimum oder Maximum zu machen, wobei die beiden Gleichungen $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ und $P\alpha + Q\beta + R\gamma = 0$ bestehen. Man hat also hier eine sogenannte Aufgabe des relativen Maximums oder Minimums zu lösen, was so geschieht:

Man addire zu der Grösse K die beiden Bedingungsgleichungen, jede mit einer constanten Grösse multiplicirt:

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 + 2L'\beta\gamma + 2M'\gamma\alpha + 2N'\alpha\beta + \varepsilon(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1) \\ + 2\varepsilon'(P\alpha + Q\beta + R\gamma) = 0,$$

diese Gleichung differentiire man nach den drei Variabeln:

$$(9) \quad L\alpha + N'\beta + M'\gamma + \varepsilon\alpha + \varepsilon'P = 0 \quad N'\alpha + M\beta + L'\gamma + \varepsilon\beta + \varepsilon'Q = 0 \\ M'\alpha + L'\beta + N\gamma + \varepsilon\gamma + \varepsilon'R = 0$$

und aus diesen hat man α, β, γ zu bestimmen.

Wir multipliciren sie zunächst der Reihe nach mit α, β, γ und addiren sie, wodurch wir ε finden: $K + \varepsilon . 1 + \varepsilon' . 0 = 0$, also $\varepsilon = - K$. Substituiren wir dies, so werden die Gleichungen (9)

$$(10) \quad (L-K)\alpha + N'\beta + M'\gamma = -\varepsilon'P \quad N'\alpha + (M-K)\beta + L'\gamma = -\varepsilon'Q \\ M'\alpha + L'\beta + (N-K)\gamma = -\varepsilon'R.$$

Bestimmen wir aus diesen Gleichungen α, β, γ, so erhalten wir, wenn wir den gemeinsamen Nenner $\begin{vmatrix} L-K & N' & M' \\ N' & M-K & L' \\ M' & L' & N-K \end{vmatrix} = \Delta$ setzen:

$$-\frac{1}{\varepsilon'} \cdot \Delta . \alpha = P\big((M-K).(N-K) - L'^2\big) \\ + Q\big((L'M' - N'(N-K)\big) + R\,\big(N'L' - M'(M-K)\big)$$

$$-\frac{1}{\varepsilon'} \cdot \Delta . \beta = P\,\big(L'M' - N'(N-K)\big) \\ + Q\,\big((N-K)(L-K) - M'^2\big) + R\big(M'N' - L'(L-K)\big)$$

$$-\frac{1}{\varepsilon'} \cdot \Delta . \gamma = P\,\big(N'L' - M'(M-K)\big) \\ + Q\,\big(M'N' - L'(L-K)\big) + R\big((L-K)(M-K) - N'^2\big).$$

Multipliciren wir diese drei Gleichungen der Reihe nach mit P, Q, R, und addiren, so kommt $-\frac{1}{\varepsilon'} \cdot \Delta . 0$, d. i.

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} P^2\big((M-K)(N-K) - L'^2\big) + Q^2\big((N-K)(L-K) - M'^2\big) \\ \qquad + R^2\big((L-K)(M-K) - N'^2\big) \\ + 2QR\big(M'N' - L'(L-K)\big) + 2RP\big(N'L' - M'(M-K)\big) \\ \qquad + 2PQ\big(L'M' - N'(N-K)\big), \end{array} \right. \quad (11)$$

welche Gleichung in Beziehung auf K offenbar vom zweiten Grade

ist. Die Wurzeln derselben (die sich auf das grösste und kleinste ϱ beziehen), seien K_1 und K_2, und es ist somit

$$\varrho_1 = \frac{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}{K_1} \text{ und } \varrho_2 = \frac{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}{K_2} \quad [K_1 < K_2]$$

der Werth des grössten und des kleinsten Krümmungsradius aller Normalschnitte, die durch einen gegebenen Punkt der Fläche gelegt werden können.

§ 49.

In Beziehung auf die Gleichung (11) bleibt uns noch nachzuweisen, dass sie stets zwei reelle Wurzeln hat. Wir verbinden damit den Beweis dafür, dass die Werthe der Winkel α, β, γ, die man vermittelst der Gleichungen (10) aus diesen beiden Wurzeln K_1 und K_2 bestimmen kann, zu zwei Linien gehören, die auf einander normal stehen. Man findet die Winkel α, β, γ, welche zu dem einen K gehören, aus (10), und eliminirt dann noch die Grösse ε' mittelst der Gleichung $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Man setze dann statt des ersten K das andere ein, und erhält dadurch ein zweites System α, β, γ, welches zu einer andern Tangente gehört. Es seien $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die Werthe von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, welche zu dem Wurzelwerthe K_1 gehören, und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ die, welche zu K_2 gehören. Dann haben wir die Gleichungen (10)

$$(L-K_1)\alpha_1 + N'\beta_1 + M'\gamma_1 = -\varepsilon_1' P$$

und zwei ähnliche, oder wie wir schreiben wollen:

$$(12) \quad \begin{aligned} L\alpha_1 + N'\beta_1 + M'\gamma_1 &= -\varepsilon_1' P + K_1\alpha_1 \\ N'\alpha_1 + M\beta_1 + L'\gamma_1 &= -\varepsilon_1' Q + K_1\beta_1 \\ M'\alpha_1 + L'\beta_1 + N\gamma_1 &= -\varepsilon_1' R + K_1\gamma_1 \end{aligned}$$

$$(12^*) \quad \begin{aligned} L\alpha_2 + N'\beta_2 + M'\gamma_2 &= -\varepsilon_2' P + K_2\alpha_2 \\ N'\alpha_2 + M\beta_2 + L'\gamma_2 &= -\varepsilon_2' Q + K_2\beta_2 \\ M'\alpha_2 + L'\beta_2 + N\gamma_2 &= -\varepsilon_2' R + K_2\gamma_2 \end{aligned}$$

Multipliciren wir das System (12) der Reihe nach mit $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, und addiren, so erhalten wir:

$$L\alpha_1\alpha_2 + M\beta_1\beta_2 + N\gamma_1\gamma_2 + L'(\beta_2\gamma_1 + \gamma_2\beta_1) + M'(\gamma_2\alpha_1 + \alpha_2\gamma_1)$$
$$+ N'(\alpha_2\beta_1 + \beta_2\gamma_1) = -\varepsilon_1'(P\alpha_2 + Q\beta_2 + R\gamma_2) + K_1(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2),$$

wo noch das Glied $-\varepsilon_1'(P\alpha_2 + Q\beta_2 + R\gamma_2) = 0$ ist, weil $P\alpha + Q\beta + R\gamma = 0$. Aehnlich erhält man aus (12*)

$$L\alpha_1\alpha_2 + M\beta_1\beta_2 + N\gamma_1\gamma_2 + L'(\beta_2\gamma_1 + \gamma_2\beta_1) + M'(\gamma_2\alpha_1 + \alpha_2\gamma_1)$$
$$+ N'(\alpha_2\beta_1 + \beta_2\gamma_1) = -\varepsilon_2'(P\alpha_1 + Q\beta_1 + R\gamma_1) + K_2(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2),$$

und da wiederum $-\varepsilon_2'(P\alpha_1 + Q\beta_1 + R\gamma_1) = 0$ ist, so ist drittens

$$(13)\ K_1(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2)=K_2(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2)$$
$$\text{oder}\ (K_1-K_2)(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2)=0.$$

Diese Gleichung kann erstens dadurch erfüllt werden, dass $K_1-K_2=0$ ist, d. h. dass die Gleichung (11) in jedem Falle zwei gleiche Wurzeln hat. Dies ist zunächst unwahrscheinlich. Man kann sich aber auch sehr leicht davon überzeugen, dass dies nicht der Fall ist, indem man ein specielles Beispiel wählt, etwa die Fläche $x^2+y^2-2z=0$, für diese die Gleichung (11) bildet und deren Wurzeln sucht, wobei man finden wird, dass diese nicht gleich sind. Diese Hypothese ist also ausgeschlossen. Es bleibt nur noch übrig, dass zweitens

$$(14)\ \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0,$$

d. h. dass die beiden Tangenten, zu denen die Krümmungshalbmesser gehören, auf einander normal stehen. Aus dieser Gleichung folgt zugleich fast von selbst, dass die quadratische Gleichung (11) nur reelle Wurzeln hat. Wenn man nämlich die Winkel $\alpha\,\beta\,\gamma$ in der oben angegebenen Weise, vermittelst der Gleichungen (10) und der Gleichung $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ darstellen wollte, so würde man finden: $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ sind gerade solche Functionen von K_1, wie $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ von K_2. Setzt man also $\alpha_1=\varphi(K_1)$, so würde $\alpha_2=\varphi(K_2)$. Gesetzt den Fall, K_1 und K_2 wären imaginär, so müsste K_1 die Form haben $a+a'.i$ und K_2 die Form $a-a'.i$. Es würde also

$$\alpha_1=\varphi(a+a'.i),\ \alpha_2=\varphi(a-a'.i)\ \text{oder}\ \alpha_1=A+A'.i,\ \alpha_2=A-A'.i,$$

und demgemäss $\alpha_1.\alpha_2=A^2+A'^2$, also wesentlich positiv. Ebenso würde auch $\beta_1\beta_2$ und $\gamma_1\gamma_2$ wesentlich positiv werden. Da aber die Summe positiver Grössen nicht Null werden kann, so müssen beide K reell sein.

§ 50.

Wir wollen nun noch, ehe wir die gewonnenen Resultate anwenden, eine Gleichung ableiten, die allerdings zur wirklichen Berechnung der Krümmungsradien viel unbrauchbarer ist als die Gleichung (11), aber oft gegeben wird. Sie macht die Voraussetzung, dass die Gleichung der Fläche nach der einen Coordinate aufgelöst ist: $\varphi(x,y)-z=0$. Bildet man von dieser Gleichung der Fläche die partiellen Differentialquotienten der ersten und zweiten Ordnung, so erhält man

$$p=\varphi'(x)\quad q=\varphi'(y)\quad r=\varphi''(x)\quad s=\varphi''(x,y)\quad t=\varphi''(y);$$

es ist somit

$$P=p,\ Q=q,\ R=-1;\ L=r,\ M=t,\ N=0;\ L'=0,\ M'=0,\ N'=s.$$

Somit wird die Gleichung (11)

$$0 = -p^2 K(t-K) - q^2 K(r-K) + (r-K)(t-K) - s^2 + 2pqsK$$

oder, nach K geordnet

$$0 = (rt - s^2) - \{(p^2+1)t - 2pqs + (q^2+1)r\} K + (1+p^2+q^2) K^2.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $(1 + p^2 + q^2)$, dividirt sie durch K^2 und setzt alsdann $\varrho = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{K}$ ein, so wird sie:

$$0 = (rt - s^2)\varrho^2$$
$$-\{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t\}\sqrt{1+p^2+q^2}\cdot\varrho + (1+p^2+q^2)^2.$$

Will man jedoch diese Formel benutzen, so hat man, weil man die Gleichung der Fläche nach z auflösen muss, sehr viel Rechnung, und diese wird schon beim Ellipsoid so complicirt, dass Dupin, der sie angestellt hat, ganz überrascht war, dass das Endresultat nach so vielen Gleichungen ein so einfaches ist. Uebrigens lässt sich an diese Form der Gleichung noch die Bemerkung knüpfen, dass eine Fläche in jedem Punkte entgegengesetzte Hauptkrümmungen hat, in welchem sie von ihrer Tangentialebene geschnitten wird. Denn bezeichnet man die beiden Krümmungsradien mit ϱ_1 und ϱ_2, so ist aus der obigen Gleichung $\varrho_1 . \varrho_2 = \frac{(1+p^2+q^2)^2}{rt-s^2}$ und dieser Ausdruck wird negativ, d. h. ϱ_1 und ϱ_2 haben entgegengesetztes Zeichen, sobald $rt - s^2$ negativ ist (cf. § 39.).

Noch eine andere specielle Form, die nicht ohne Interesse ist, gilt für den Fall, dass in der Gleichung der Fläche $F(x, y, z) = 0$ die Variabeln getrennt sind, dass sie also, wenn X eine Function von x allein, Y eine Function von y allein, Z eine Function von z allein bedeutet, die Form hat $X + Y + Z = 0$, wie dies z. B. bei den Paraboloiden und den Flächen zweiten Grades der Fall ist, welche einen Mittelpunkt haben. Es wird nämlich alsdann

$$P = X', Q = Y', R = Z'; L = X'', M = Y'', N = Z''; L' = 0, M' = 0, N' = 0,$$

und somit die Gleichung (11)

$$0 = P^2(M-K)(N-K) + Q^2(N-K)(L-K) + R^2(L-K)(M-K)$$

oder wenn man mit dem Producte $(L-K)(M-K)(N-K)$ dividirt:

$$0 = \frac{P^2}{L-K} + \frac{Q^2}{M-K} + \frac{R^2}{N-K} \text{ oder endlich } 0 = \frac{X'^2}{X''-K} + \frac{Y'^2}{Y''-K} + \frac{Z'^2}{Z''-K}.$$

Zum Beispiel wird für die Flächen zweiten Grades, welche einen Mittelpunkt haben, und die in der Gleichung

$$\frac{A}{2}x^2 + \frac{B}{2}y^2 + \frac{C}{2}z^2 - \tfrac{1}{2} = 0$$

enthalten sind, jeder der beiden Hauptkrümmungsradien gegeben durch

$$\varrho = \frac{\sqrt{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}}{K},$$

wo man für K nacheinander die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung $0 = \frac{A^2x^2}{A-K} + \frac{B^2y^2}{B-K} + \frac{C^2z^2}{C-K}$ einzusetzen hat.

Auch über die Richtung, in welcher bei einer Fläche zweiten Grades, die einen Mittelpunkt hat, die Hauptkrümmungsradien zu liegen kommen, können wir uns leicht Aufschluss verschaffen. Nach der Formel (7) ist der Krümmungsradius irgend eines Normalschnittes gegeben durch die Gleichung

$$\varrho = \frac{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}{L\cos^2\alpha + M\cos^2\beta + N\cos^2\gamma + 2L'\cos\beta\cos\gamma + 2M'\cos\gamma\cos\alpha + 2N'\cos\alpha\cos\beta}.$$

Hiernach erhält man z. B. für das Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ folgenden Ausdruck:

$$\varrho = \frac{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}{\frac{1}{a^2}\cos^2\alpha + \frac{1}{b^2}\cos^2\beta + \frac{1}{c^2}\cos^2\gamma}.$$

Die Ausdrücke in Zähler und Nenner sind leicht zu interpretiren. Legt man nämlich an den betreffenden Punkt (x, y, z) eine Tangentialebene, so ist die Gleichung derselben $\frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} + \frac{\zeta z}{c^2} - 1 = 0$. Daraus folgt: die Entfernung p des Mittelpunktes des Ellipsoids von dieser Ebene ist

$$p = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}};$$

der Zähler des Ausdrucks für ϱ ist also der reciproke Werth von p. Da ferner α, β, γ die Winkel sind, welche die Tangente des Normalschnitts mit den drei Axen bildet, so sind, wenn man dieser Tangente einen Radius des Ellipsoids parallel zieht und seine Länge vom Mittelpunkte bis zur Fläche mit d bezeichnet, die Coordinaten seines Endpunktes $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$, $d\cos\gamma$, für welche die Gleichung des Ellipsoids gelten muss, so dass also

$$d^2\left\{\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\cos^2\beta}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma}{c^2}\right\} - 1 = 0$$

ist. Demnach ist zweitens gefunden: der Nenner von ϱ ist der reciproke Werth von d^2. Es ist also der Krümmungsradius jedes Normalschnittes $\varrho = \frac{d^2}{p}$, wo d der Radius ist, der der Tangente des Normalschnitts parallel geht, und p die Entfernung der Tangentialebene vom Mittelpunkte. Für das System aller Normalschnitte, welche in einem Punkte des Ellipsoids möglich sind, bleibt nun p

ungeändert, d beschreibt eine Ellipse parallel der Tangentialebene: daraus geht hervor, welches die Richtungen der grössten und kleinsten Krümmung sein werden: man hat für sie nur die Hauptaxen des Diametralschnitts zu bestimmen. Wir haben also den Satz: Bei einem Ellipsoid, oder, da die Vorzeichen von a^2, b^2, c^2 nicht in Betracht gekommen sind, allgemein: Bei jeder Fläche zweiten Grades mit einem Mittelpunkte erhält man die Richtungen des am meisten und des am wenigsten gekrümmten Normalschnitts, indem man zuerst die Hauptaxen desjenigen Diametralschnitts bestimmt, der der Tangentialebene parallel ist, und vom gegebenen Punkte der Fläche aus Tangenten zieht, welche diesen Axen parallel sind.

Es erledigt sich hier zugleich eine andere Frage für diese drei Flächen: Giebt es Punkte auf ihnen, wo alle Normalschnitte dieselbe Krümmung haben? Dies kann nur da sein, wo die Tangentialebene parallel ist den Kreisschnitten. Wir kommen bald noch auf solche Punkte, die man Nabelpunkte (besser sphärische Punkte nennt) zurück, und bemerken nur, dass das Ellipsoid ihrer vier hat, welche in der Ebene der grössten und kleinsten Axe liegen.

§ 51.

Wir wollen unsre Formeln nun noch specialisiren für die Rotationsflächen. Eine Rotations- oder Revolutions-fläche ist eine Fläche, die entsteht, indem eine Curve sich um eine Axe bewegt. Jeder Punkt der rotirenden Curve erzeugt bei der Bewegung einen Kreis, dessen Ebene durch die auf ihr normale Axe im Mittelpunkte getroffen wird. Daraus folgt, dass es nicht zwei Arten von Rotationsflächen giebt: es sind diejenigen, welche durch Rotation einer Curve doppelter Krümmung oder einer ebenen Curve um eine nicht in ihrer Ebene liegende Axe erzeugt werden, dem Wesen nach nicht verschieden von denjenigen, welche durch Rotation einer ebenen Curve um eine in ihrer Ebene liegende Axe entstehen, und es lassen sich alle Rotationsflächen auf diese letztere Entstehungsart zurückführen. Denkt man sich nämlich irgend eine Curve um irgend eine Axe rotiren bis sie die Rotation vollendet, und in der entstehenden Fläche einen ebenen Schnitt durch die Rotationsaxe gelegt, so erhält man dadurch diejenige ebene Curve, deren Rotation um dieselbe Axe dieselbe Fläche hervorbringt.

Wollen wir nun die Hauptkrümmungsradien einer jeden Rotationsfläche finden, siehe Fig. 16, so kommt es zunächst darauf an, die Gleichung dieser Art Flächen aufzustellen. Die Gleichung der rotirenden Curve, welche wir als eben annehmen, wird, wenn wir die

Rotationsaxe zur z Axe wählen, die Form haben $z = f(\xi)$. Wenn diese Curve rotirt, so behält während der Rotation jeder Punkt unverändert sein z, es ändern sich aber die beiden andern Coordinaten x und y, so jedoch, dass die Entfernung des Punktes von der z Axe nämlich $\sqrt{x^2+y^2}$ immer dieselbe bleibt und zwar ξ. Es ist also die Gleichung jeder Rotationsfläche, wenn die z Axe Rotationsaxe ist, $z = f(\sqrt{x^2+y^2})$ oder auch $z = \varphi(x^2+y^2)$, d. h. in der Gleichung der Fläche kommen, wenn man sie nach z auflöst, die Coordinaten x und y nur so vor, dass sich der ganze Ausdruck immer in x^2+y^2 und dessen Potenzen, Vielfache u. s. w. zusammenfassen lässt.

Wir wollen in der folgenden Untersuchung die Gleichung der Fläche so schreiben: $z = f(\xi)$ wo $\xi^2 = x^2+y^2$, und wenden nun zur Auffindung der Halbmesser der grössten und kleinsten Krümmung im Punkte (x, y, z) die erste in § 50. erwähnte Form der allgemeinen Gleichung (11) an, weil die Gleichung der Fläche nach z aufgelöst ist. Wir bilden uns zu dem Ende die Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung:

$$p = f'(\xi).\frac{\partial \xi}{\partial x} \quad q = f'(\xi).\frac{\partial \xi}{\partial y}; \quad r = f''(\xi).\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + f'(\xi).\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$s = f''(\xi).\frac{\partial \xi}{\partial x}.\frac{\partial \xi}{\partial y} + f'(\xi).\frac{\partial^2 \xi}{\partial x . \partial y} \quad t = f''(\xi).\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + f'(\xi).\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}.$$

Dabei ist

$$\xi.\frac{\partial \xi}{\partial x} = x \quad \xi\frac{\partial \xi}{\partial y} = y$$

und folglich

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \xi\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 1, \; \frac{\partial \xi}{\partial x}.\frac{\partial \xi}{\partial y} + \xi\frac{\partial^2 \xi}{\partial x . \partial y} = 0, \; \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + \xi\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 1,$$

also

$$p = f'.\frac{x}{\xi} \quad q = f'.\frac{y}{\xi}; \quad r = f''\frac{x^2}{\xi^2} + f'.\frac{\xi^2 - x^2}{\xi^3} = f''.\frac{x^2}{\xi^2} + f'.\frac{y^2}{\xi^3}$$

$$s = f''.\frac{xy}{\xi^2} - f'.\frac{xy}{\xi^3} \quad t = f''.\frac{y^2}{\xi^2} + f'.\frac{x^2}{\xi^3}.$$

Diese Ausdrücke hätten wir nun in die oben erwähnte Gleichung für ϱ einzusetzen, und wo möglich die dadurch entstehende Gleichung zu vereinfachen. Dies Letztere ist möglich, und man kann es sogar durch eine einfache Betrachtung, bevor man die Ausdrücke einsetzt. Da nämlich im Laufe eines Parallelkreises die Rotationsfläche an einem Punkte so wie im andern ist, so können wir für die folgende Entwickelung einen beliebigen Punkt eines solchen Parallelkreises zu Grunde legen und das Resultat wird allgemein für jeden Punkt des Parallelkreises gelten. Wir wählen, weil dadurch die Unter-

suchung am einfachsten wird, denjenigen Punkt, wo die Fläche die zx Ebene schneidet: dort ist $y = 0$ also $x = \xi$ und

$$p = f' \quad q = 0; \quad r = f'' \quad s = 0 \quad t = f' . \frac{1}{\xi} .$$

Danach wird die Gleichung für ϱ

$$\frac{f' f''}{\xi} \varrho^2 - \left(f'' + (1 + f'^2) \frac{f'}{\xi}\right) \sqrt{1 + f'^2} . \varrho + (1 + f'^2)^2 = 0,$$

welche wir auch so schreiben können:

$$\varrho^2 - \left(\frac{\xi \sqrt{1 + f'^2}}{f'} + \frac{(1 + f'^2)^{\frac{3}{2}}}{f''}\right) \varrho + \frac{\xi (1 + f'^2)^2}{f' f''} = 0,$$

in welcher Form man sogleich erkennt, dass die beiden Wurzeln für ϱ sind

$$\frac{\xi \sqrt{1 + f'^2}}{f'} \text{ und } \frac{(1 + f'^2)^{\frac{3}{2}}}{f''} .$$

Da die Gleichung $z = f(\xi)$ die der Meridiancurve ist, so ist die zweite Wurzel ϱ zugleich der Krümmungsradius des Meridians; mithin ist der Krümmungsradius des Meridians der Krümmungsradius eines Hauptschnitts. Der zweite Hauptschnitt steht normal auf diesem. Sein Krümmungsradius ist $\frac{\xi \sqrt{1 + f'^2}}{f'}$, ein Ausdruck, welcher sich auch leicht geometrisch deuten lässt. Denkt man sich nämlich an die Meridiancurve im Punkte (ξ, z) eine Tangente gezogen, welche die z Axe unter dem Winkel α schneidet, so ist auch der Winkel der Abscisse ξ mit der Normale des vorliegenden Punktes gleich α.

Es ist aber $f' = \cot \alpha$, also $\frac{\sqrt{1 + f'^2}}{f'} = \frac{1}{\cos \alpha}$ und mithin die Grösse des zweiten Hauptkrümmungshalbmessers $= \frac{\xi}{\cos \alpha}$, d. i. gleich der Normale vom Curvenpunkt bis zur z Axe. Wir haben also folgenden Satz:

Die Hauptkrümmungsradien in einem Punkt einer Umdrehungsfläche sind an Länge gleich dem Krümmungsradius des Meridians in jenem Punkte und resp. dem Stück der Normale des Meridians in jenem Punkte, welches zwischen dem Punkte und der z Axe liegt. Dass die Hauptschnitte selbst bezüglich der Meridian und der auf ihm normale Schnitt sind, ist evident.

Was sich hier gezeigt hat, dass nämlich die beiden Wurzeln von ϱ reell sind, gilt allgemein: es lässt sich beweisen, dass, so lange p, q, r, s, t selbst reell sind, auch die beiden Werthe von ϱ reell sind. Der Beweis gründet sich darauf, dass der Radicand der Quadratwurzel, welche in dem Ausdruck für ϱ sich ergiebt, sich in eine Summe positiver Grössen zerlegen lässt. Der Radicand lautet nämlich

$$\left((1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r\right)^2\frac{1+p^2+q^2}{4}-(1+p^2+q^2)^2(rt-s^2),$$

und dies ist, wovon man sich leicht überzeugt:

$$\frac{1+p^2+q^2}{4}\left\{\left\{(1+p^2)t-(1+q^2)r+2pq\left(\frac{pqr}{1+p^2}-s\right)\right\}^2\right.$$
$$\left.+4(1+p^2+q^2)\left\{\frac{pqr}{1+p^2}-s\right\}^2\right\}.$$

§ 52.

Aufgabe. Wie findet man allgemein diejenigen Punkte einer Fläche, in welchen die beiden Hauptkrümmungsradien und folglich auch alle Krümmungsradien einander gleich sind, oder: Wie findet man die Nabelpunkte einer Fläche allgemein? (Cf. § 50. extr.)

Die erste Ueberlegung führt darauf, dass auf jeder Fläche unzählig viele Punkte sind, in denen die beiden Hauptkrümmungsradien einander gleich sind. Denn ausserdem, dass sie der Gleichung der Fläche genügen müssen, haben sie dem Anschein nach nur noch eine Gleichung zu befriedigen, nämlich die: der zu Ende des vor. Parag. erwähnte Radicand $=0$. Da somit für die Coordinaten x, y, z nur zwei Gleichungen existiren, so würde es dem entsprechend auf jeder Fläche eine ganze Curve von Nabelpunkten geben. Dass dies aber nicht der Fall ist, folgt daraus, dass der Radicand als Summe von nothwendig positiven Grössen (abgesehen von seinem Factor) nicht Null werden kann, ohne dass seine beiden Glieder einzeln Null sind: ausser der Gleichung der Fläche existirt also für die Nabelpunkte nicht blos noch eine Gleichung, sondern die beiden, welche aus ihr entstehen: $\frac{pqr}{1+p^2}-s=0$ und $(1+p^2)t-(1+q^2)r=0$, welche beide wir auch so schreiben können: $\frac{r}{1+p^2}=\frac{s}{pq}=\frac{t}{1+q^2}$. Das heisst:

Die Fläche $z=f(x, y)$ hat Nabelpunkte da, wo die drei zweiten partiellen Differentialquotienten von z nach x und y, nämlich r, s, t proportional sind bezüglich den Ausdrücken: $1+p^2$, pq, $1+q^2$.

Eine andere Ableitung hierfür ist folgende. Nach der Formel (7) ist der Krümmungsradius irgend eines Normalschnitts

$$\varrho=\frac{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}{K},$$

oder wenn man sich die Gleichung der Fläche auf die Form $z=f(x, y)$ gebracht denkt: $\varrho=\frac{\sqrt{p^2+q^2+1}}{r\cos^2\alpha+2s\cos\alpha\cos\beta+t\cos^2\beta}$, worin für α, β, γ die Gleichungen gelten

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \quad p\cos\alpha+q\cos\beta=\cos\gamma,$$

oder mit Elimination von $\cos\gamma$:

$$(1+p^2)\cos^2\alpha + 2pq\cos\alpha\cos\beta + (1+q^2)\cos^2\beta = 1.$$

Für einen Nabelpunkt sollen nun alle Normalschnitte dieselbe Krümmung haben. Es muss also in dem Ausdrucke für ϱ, weil der Zähler für jeden Punkt der Fläche constant, der Nenner immer denselben Werth beibehalten, welche Werthe man auch dem $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ beilegt, vorausgesetzt, dass diese der aufgestellten Bedingungsgleichung für $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ genügen. Es ist also die Frage: in welchem Falle wird der Ausdruck $r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha.\cos\beta + t\cos^2\beta$ beständig denselben Werth beibehalten, während für α und β nur die Gleichung stattfindet

$$(1+p^2)\cos^2\alpha + 2pq\cos\alpha\cos\beta + (1+q^2)\cos^2\beta = 1.$$

Der Werth des Nenners sei beständig gleich λ, so ist also

$$r\cos^2\alpha + 2s.\cos\alpha.\cos\beta + t.\cos^2\beta = \lambda.$$

Andrerseits haben wir aus der Bedingungsgleichung

$$\lambda\,(1+p^2)\cos^2\alpha + 2\lambda pq\cos\alpha\cos\beta + \lambda(1+q^2)\cos^2\beta = \lambda.$$

Damit also die erste Gleichung nicht nur für eine Anzahl Werthsysteme von α und β, sondern für jeden beliebigen Werth von α und den vermöge der zweiten Gleichung dazu gehörigen von β bestehe, müssen sich α und β aus beiden Gleichungen nicht bestimmen lassen, die beiden Gleichungen müssen identisch sein, d. h.

$$r = \lambda(1+p^2) \quad s = \lambda pq \quad t = \lambda(1+q^2), \text{ wie oben.}$$

B. Die Gleichung der Fläche sei gegeben in der Form (3) (§ 24).

5. Einleitendes.

§ 53.

Nachdem wir bis jetzt bei den Untersuchungen über die Flächen die Form $F(x, y, z) = 0$ der Gleichung oder die speciellere $z = f(x, y)$ zu Grunde gelegt haben (cf. § 28.), wollen wir jetzt annehmen, dass die Gleichung der Fläche in der Form folgenden Systems gegeben sei: Jede der drei rechtwinkligen Coordinaten x, y, z als Functionen zweier neuen Grössen, die wir durch u und v bezeichnen wollen. Lösen wir jetzt die Aufgaben, die wir bisher für rechtwinklige Coordinaten gelöst haben, für diese neue Form der Gleichung, so bekommen wir in gewisser Weise weitläufigere, in gewisser Weise aber auch viel symmetrischere Formeln. Wir re-

capituliren zunächst kurz, was über diese Art der Darstellung einer Fläche in den §§ 24. bis 27. gesagt ist.

Betrachtet man in den drei Gleichungen, welche die drei Coordinaten x, y, z als Functionen von u und v geben, zunächst u als constant, dagegen v als veränderlich, so erhält man eine Curve, welche auf der Fläche liegt. Zu jedem Werthe von u wird eine solche Curve gehören, in deren Gleichungen v die unabhängige Veränderliche ist, und jede solche Curve wollen wir nennen eine Curve V. Ebenso wollen wir eine Curve, welche sich durch die Annahme: v constant, also u variabel, ergiebt, nennen eine Curve U. Sämmtliche Curven V ordnen sich in ein System, und sämmtliche Curven U in ein zweites, so dass also die ganze Fläche mit zwei Systemen von Curven überzogen gedacht wird. Jeder Punkt der Fläche wird alsdann gegeben als Durchschnitt einer gewissen Curve V in eine gewisse Curve U; und jede andere, nicht zu diesen beiden Systemen gehörige Curve auf der Fläche wird gegeben durch eine Gleichung zwischen den Veränderlichen u und v.

Betreffs der schon früher erwähnten Beispiele der Kugel und des dreiaxigen Ellipsoids wollen wir noch anführen, dass unter den unzähligen Arten, diese Flächen durch zwei neue Grössen u und v darzustellen, für dieselben ausser den obenerwähnten Gleichungen noch folgende von häufiger Anwendung sind: für die Kugel

$$x = a.\sin u.\sqrt{1-k^2.\sin^2 v} \quad y = a.\cos u.\cos v \quad z = a.\sin v.\sqrt{1-(1-k^2).\sin^2 u},$$

wo k eine beliebige Constante bedeutet; fürs dreiaxige Ellipsoid:

$$x = a.\sin u.\sqrt{1-k^2.\sin^2 v} \quad y = b.\cos u.\cos v \quad z = c.\sin v.\sqrt{1-(1-k^2).\sin^2 u}.$$

Auch für die Schraubenfläche wollen wir eine solche Darstellungsart erwähnen. Man denke sich diese Fläche so entstanden, dass eine gerade Linie auf einer andern stets normal bleibend sich an dieser so heraufbewegt, dass die Höhen, um welche sie steigt, proportional sind den Winkeln, um welche sie sich dreht. Nennen wir diesen Winkel u und bezeichnen die zugehörige Höhe durch $\alpha.u$, wo α eine Constante ist, so ist zunächst die Coordinate $z = \alpha.u$. Da ferner ein Punkt, welcher ursprünglich von der Axe die Entfernung v hat, stets diese Entfernung beibehält, so sind die drei Gleichungen der Schraubenfläche hiernach

$$z = \alpha.u \quad x = v.\cos u \quad y = v.\sin u,$$

aus welchen man durch Elimination von v und u wiederum die gewöhnliche Form herleiten kann: $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\frac{z}{\alpha}$ oder, um z als explicite Function von y und x darzustellen: $z = \alpha.\operatorname{Arc}\operatorname{tg}\frac{y}{x}$.

Wir gehen nun über zur allgemeinen Betrachtung der Flächen für diese Form ihrer Gleichung. Wir wollen dabei für alle folgenden Entwickelungen nachstehende Abkürzungen einführen:

$$\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} = A$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} = B$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = C$$

$$A\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + B\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + C\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = D$$

$$A\frac{\partial^2 x}{\partial u.\partial v} + B\frac{\partial^2 y}{\partial u.\partial v} + C\frac{\partial^2 z}{\partial u.\partial v} = D'$$

$$A\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + B\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + C\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = D''$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = E$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = F$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = G.$$

§ 54.

Aus § 5. folgt, dass für jede Curve U die Gleichungen ihrer Tangente im Punkte x, y, z folgende sind:

$$\frac{\xi - x}{\frac{\partial x}{\partial u}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial y}{\partial u}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\partial z}{\partial u}},$$

und die Cosinus der drei Winkel α, β, γ, welche diese Tangente mit den drei Axen bildet:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{\sqrt{E}} \quad \cos\beta = \frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{\sqrt{E}} \quad \cos\gamma = \frac{\frac{\partial z}{\partial u}}{\sqrt{E}}.$$

Nennen wir ebenso die drei Winkel, welche eine Curve V im Punkte $x\,y\,z$ mit den drei Axen bildet, resp. α', β', γ', so haben wir:

$$\cos\alpha' = \frac{\frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{G}} \quad \cos\beta' = \frac{\frac{\partial y}{\partial v}}{\sqrt{G}} \quad \cos\gamma' = \frac{\frac{\partial z}{\partial v}}{\sqrt{G}}.$$

Daraus ergiebt sich, dass der Winkel w, unter dem sich diese Curven U und V schneiden, folgender Gleichung genügt:

$$\cos w = \frac{F}{\sqrt{E.G}}.$$

Demnach ist überall, wo diese beiden Curven einander rechtwinklig schneiden, $F = 0$. Also: die Bedingung, dass die Curven U und V sich rechtwinklig durchkreuzen, ist $F = 0$.

Drückt man z. B. die Gleichung der Kugel auf eine der beiden in den Paragraphen 24. oder 53. angegebenen Weisen aus, also

$$z = a \sin v \quad x = a \cos v \cos u \quad y = a \cos v \sin u,$$

d. h. durch die Länge v und die Breite u, so müssen, weil die dieser Art der Darstellung entsprechenden Systeme von Meridianen und Parallelkreisen auf einander normal stehen, diese drei Gleichungen die Gleichung $F = 0$ befriedigen, was auch der Fall ist. Ebenso sieht man, dass die im vorigen Paragraphen für die Kugel angegebenen Gleichungen dieser Bedingung genügen.

§ 55.

Das Oberflächenelement, wie es durch diese Darstellung der Fläche bedingt wird, siehe Fig. 17, findet man folgendermassen: Man denke sich zwei einander unendlich nahe Curven des Systems U, für welche also v constant ist und zwar resp. die beiden Werthe $v = \alpha$ und $v = \alpha + \varepsilon$ hat, so dass ε eine unendlich kleine Grösse bedeutet. Man denke sich ebenso zwei unendlich nahe Curven des Systems V, für welche u resp. die beiden constanten Werthe $u = \beta$ und $u = \beta + \varepsilon'$ hat. Man bezeichne den Punkt $(v = \alpha,\ u = \beta)$ mit (1), $(v = \alpha,\ u = \beta + \varepsilon')$ mit (2), $(v = \alpha + \varepsilon,\ u = \beta)$ mit (3), $(v = \alpha + \varepsilon,\ u = \beta + \varepsilon')$ mit (4). Da nun die Curven einander unendlich nahe sind, so kann man das Flächenelement (1, 2, 3, 4) als ebenes Parallelogramm ansehen, und demnach ist sein Inhalt gleich dem Product zweier Seiten multiplicirt mit dem Sinus des eingeschlossenen Winkels, also gleich $(1, 2).(1, 3).\sin w$. Es ist nun

$$\cos w = \frac{F}{\sqrt{E.G}}, \text{ also } \sin w = \frac{\sqrt{E.G - F^2}}{\sqrt{E.G}} \text{ d. i. } = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{\sqrt{E.G}}.$$

Ferner ist, wenn (1) die Coordinaten x, y, z, also (2) die Coordinaten

$$x + \frac{\partial x}{\partial u} du,\ y + \frac{\partial y}{\partial u} du,\ z + \frac{\partial z}{\partial u} du$$

hat, $(1, 2) = \sqrt{E}.du$, und ebenso findet man $(1, 3) = \sqrt{G}.dv$. Multiplicirt man daher diese drei Ausdrücke für $\sin w$, (1, 2) und (1, 3), so erhält man:

$$\text{das Oberflächenelement} = du.dv.\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Will man daher die ganze Oberfläche oder einen bestimmten Theil von ihr finden, so hat man diesen Ausdruck zweimal zu integriren,

und zwar innerhalb gewisser Grenzen, welche sich aus der Grösse des gesuchten Stückes in jedem einzelnen Falle bestimmen.

Ueberträgt man diese Formel in die gewöhnliche Art der Darstellung, welche man so schreiben kann: $z = f(u, v)$ $x = u$ $y = v$, so verwandelt sich der Ausdruck für das Element in den bekannten

$$\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dx\, dy \quad \text{oder} \quad \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\, dx . dy.$$

§ 56.

Um die Tangente an eine auf der Fläche liegende, siehe Fig. 18, aber nicht zu einem der beiden Systeme U oder V gehörige Curve $u = f(v)$ zu finden, berechnen wir zuerst ihr Bogenelement, d. h. die Grösse $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. Wenn man das Differential von u aus der Gleichung der Curve ableitet: $du = u'.dv$, so erhält man alsdann aus den Gleichungen für x, y, z:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot dv \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot dv \quad dz = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot dv.$$

Es wird also $ds^2 = E.du^2 + G.dv^2 + 2F.du.dv$ und folglich, wenn man für du seinen Werth einträgt, $ds = \sqrt{E.u'^2 + G + 2F.u'}\, dv$. Die Länge der Curve innerhalb bestimmter Gränzen für v findet man demnach, wenn man diese Gleichung nach v innerhalb dieser Gränzen integrirt. Man kann nun sehr leicht die Winkel ableiten, welche die Tangente an diese Curve mit den drei Axen bildet. Nennt man die Winkel a, b, c, so ist

$$\cos a = \frac{\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{du}{dv} + \frac{\partial x}{\partial v}}{\frac{ds}{dv}} \quad \cos b = \frac{\frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{du}{dv} + \frac{\partial y}{\partial v}}{\frac{ds}{dv}} \quad \cos c = \frac{\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dv} + \frac{\partial z}{\partial v}}{\frac{ds}{dv}}.$$

Hieraus ergiebt sich auf der Stelle der Winkel, welchen diese Curve, die wir durch C bezeichnen wollen, mit den Curven U, und der, welchen sie mit den Curven V bildet: man findet

$$\cos (C, U) = \frac{E . \frac{du}{dv} + F}{\sqrt{E} . \frac{ds}{dv}} \quad \text{und} \quad \cos (C, V) = \frac{F . \frac{du}{dv} + G}{\sqrt{G} . \frac{ds}{dv}}.$$

Schneiden die Curven U und V einander rechtwinklig, so ist $F = 0$, und die beiden Winkel (C, U) und (C, V) ergänzen sich zu einem Rechten, so dass man statt $\cos (C, U)$ $\sin (C, V)$ schreiben kann, und demgemäss die Formel erhält: $\operatorname{tg} (C, V) = \sqrt{\frac{E}{G}} \cdot \frac{du}{dv}$. Diese Formel ist eigentlich von selbst einleuchtend. Stellen wir uns wie-

derum zwei unendlich nahe Curven U und zwei unendlich nahe Curven V vor, so ist das Bogenelement der Curve U: $d\sigma = \sqrt{E}.du$, das der Curve V: $d\sigma' = \sqrt{G}.dv$ und $\operatorname{tg}(C, V) = \frac{d\sigma}{d\sigma'} = \sqrt{\frac{E}{G}} \cdot \frac{du}{dv}$.

§ 57.

Als Beispiel zu diesen letztern Formeln wollen wir die Loxodrome berechnen. Man nennt Loxodrome diejenige Curve auf der Kugel, welche sämmtliche Meridiane unter demselben Winkel schneidet. Hieraus folgt schon, dass jeder Parallelkreis eine Loxodrome ist, denn er schneidet alle Meridiane rechtwinklig. Wählen wir zum Radius der Kugel die Einheit, so sind ihre Gleichungen, durch die geographische Länge u und die geographische Breite v ausgedrückt, $x = \cos v.\cos u \quad y = \cos v.\sin u \quad z = \sin v$. Um nun den Winkel zu finden, den irgend eine Curve C auf der Kugel mit dem Meridian, (welcher eine Curve V ist), bildet, berechnen wir die partiellen Differentialquotienten von x, y, z nach u und v, und erhalten dafür:

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -\sin v.\cos u \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -\sin v.\sin u \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \cos v$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\cos v.\sin u \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \cos v.\cos u \quad \frac{\partial z}{\partial u} = 0;$$

also ist $E = \cos^2 v \quad F = 0 \quad G = 1$, also wird $\operatorname{tg}(C, V) = \cos v.\frac{du}{dv}$. Soll nun die Curve C Loxodrome sein, so muss der Winkel (C, V) constant, $= \alpha$ sein, also haben wir die Differentialgleichung

$$\frac{du}{dv} \cdot \cos v = \operatorname{tg}\alpha \text{ oder } \operatorname{tg}\alpha.\frac{dv}{\cos v} = du.$$

Diese Gleichung lässt sich unmittelbar integriren; sie giebt:

$$\operatorname{tg}\alpha.\,l\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{v}{2}\right) + c = u.$$

Dies die Gleichung der Loxodrome.

Sie enthält zwei Constante, welche hinreichen, um zwei Punkte auf der Kugel zu bestimmen, durch welche die Loxodrome gelegt werden soll, und umgekehrt reichen zwei Punkte auf der Kugel hin, um zwischen ihnen eine bestimmte Loxodrome zu legen. Soll z. B. der Ausgangspunkt der Loxodrome auf dem Null-Meridian und zwar in der geographischen Breite β liegen, so müssen der gefundenen Gleichung gleichzeitig die Werthe $u = 0 \quad v = \beta$ genügen: $\operatorname{tg}\alpha.\,l\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) + c = 0$, und man kann somit die Constante mittelst β eliminiren, und die Gleichung der Loxodrome wird dann:

$$\operatorname{tg} \alpha . l \frac{\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{v}{2}\right)}{\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)}=u,$$

aus welcher man noch den Winkel α eliminiren oder auch finden kann, sobald der Endpunkt der Loxodrome gegeben ist.

Als Schluss zu diesen einleitenden Formeln bemerken wir noch: Wenn zwei Curven auf einer Fläche sich in einem Punkte berühren, d. h. dort eine gemeinschaftliche Tangente haben, so haben für diesen Punkt nicht blos die Grössen u und v in beiden Curven denselben Werth, sondern auch der Differentialquotient $\frac{du}{dv}$.

Die Richtigkeit hiervon ersieht man aus den Formeln für $\cos(C, U)$ und $\cos(C, V)$, welche für beide Curven bezüglich identisch sein müssen, und in welchen E, F, G der einen Curve gleich den E, F, G der andern sind, weil die Coordinaten x, y, z beider Curven in diesem Punkte dieselben sind.

6. Krümmung der Flächen.

§ 58.

Wir stellen uns nun auch in Beziehung auf diese Darstellung der Flächen die Frage: Wie findet man die Richtungen der Hauptschnitte, und die grösste und kleinste Krümmung? Diese Untersuchung führt auf einen der schönsten Sätze aus der Geometrie der Flächen, welcher von Gauss gegeben ist.

Nehmen wir an, dass irgend eine Curve auf der Fläche gezogen sei, deren Gleichung sei $u = f(v)$, und bezeichnen wir $\frac{du}{dv}$ kurzweg mit u', $\frac{d^2u}{dv^2}$ mit u''. Wollen wir nun die Gleichung der Curve in der gewöhnlichen Art der Darstellung haben, wo die drei Coordinaten x, y, z gegeben sind als Functionen einer neuen unabhängigen veränderlichen Grösse, so haben wir nur in die drei Gleichungen der Fläche, welche die Coordinaten als Functionen von u und v ausdrücken, statt u einzusetzen die Function $f(v)$. Unter dieser Voraussetzung bekommen wir

$$\frac{dx}{dv}=\frac{\partial x}{\partial u}u'+\frac{\partial x}{\partial v} \qquad \frac{d^2x}{dv^2}=\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}u'^2+\frac{\partial x}{\partial u}u''+2\frac{\partial^2 x}{\partial u.\partial v}u'+\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$$

$$\frac{dy}{dv}=\frac{\partial y}{\partial u}u'+\frac{\partial y}{\partial v} \qquad \frac{d^2y}{dv^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}u'^2+\frac{\partial y}{\partial u}u''+2\frac{\partial^2 y}{\partial u.\partial v}u'+\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}$$

$$\frac{dz}{dv}=\frac{\partial z}{\partial u}u'+\frac{\partial z}{\partial v} \qquad \frac{d^2z}{dv}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}u'^2+\frac{\partial z}{\partial u}u''+2\frac{\partial^2 z}{\partial u.\partial v}u'+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

Nun ist der Krümmungsradius irgend einer Curve doppelter Krümmung nach § 17.:

$$r = \frac{\left\{\left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dv}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\left\{\left(\frac{dy}{dv}\frac{d^2z}{dv^2} - \frac{dz}{dv}\frac{d^2y}{dv^2}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dv}\frac{d^2x}{dv^2} - \frac{dx}{dv}\frac{d^2z}{dv^2}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dv}\frac{d^2y}{dv^2} - \frac{dy}{dv}\frac{d^2x}{dv^2}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

In diese Formel sind die für $\frac{dx}{dv}$, $\frac{d^2x}{dv^2}$ u. s. w. aufgestellten Werthe zu substituiren, und dadurch erhält man den Ausdruck für den Krümmungsradius irgend einer Curve, die auf der Fläche gezogen ist.

Wir wollen aber nur den Krümmungsradius eines Normalschnitts haben. Wir haben also noch die Bedingung hinzuzufügen, dass die betrachtete Curve ein Normalschnitt der Fläche ist, oder, was für unsern Zweck denselben Werth hat, wir müssen ausdrücken, dass die Osculationsebene der Curve in dem betreffenden Punkte eine Normalebene der Curve ist oder dass sie durch die Normale geht.

§ 59.

Die Normale einer Fläche hat die Gleichungen:

$$\frac{\xi - x}{A} = \frac{\eta - y}{B} = \frac{\zeta - z}{C}.$$

Denn: die Normale ist eine Gerade, welche normal stehen muss auf allen Tangenten, die durch ihren Fusspunkt gezogen sind. Sie wird dies thun, sobald sie nur auf zwei Tangenten normal steht. Diese beiden Tangenten mögen sein die Tangenten an die Curve U und die Curve V, welche sich in dem gegebenen Punkte schneiden: es handelt sich also darum, wenn man die Gleichung der Normale finden will, in den Gleichungen $\frac{\xi - x}{l} = \frac{\eta - y}{m} = \frac{\zeta - z}{n}$, welche ihre allgemeine Form sein werden, die Constanten l, m, n so zu bestimmen, dass sie den beiden Gleichungen $l\frac{\partial u}{\partial x} + m\frac{\partial u}{\partial y} + n\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ und $l\frac{\partial v}{\partial x} + m\frac{\partial v}{\partial y} + n\frac{\partial v}{\partial z} = 0$ genügen. Diese Gleichungen ergeben aber $l:m:n = A:B:C$. Folglich sind die Gleichungen der Normale

$$\frac{\xi - x}{A} = \frac{\eta - y}{B} = \frac{\zeta - z}{C}.$$

Die Osculationsebene irgend einer Curve hat die Gleichung $\alpha(\xi - x) + \beta(\eta - y) + \gamma(\zeta - z) = 0$, worin nach § 8.

$$\alpha = \frac{dy}{dv}\cdot\frac{d^2z}{dv^2} - \frac{dz}{dv}\cdot\frac{d^2y}{dv^2},\ \beta = \frac{dz}{dv}\cdot\frac{d^2x}{dv^2} - \frac{dx}{dv}\cdot\frac{d^2z}{dv^2},\ \gamma = \frac{dx}{dv}\cdot\frac{d^2y}{dv^2} - \frac{dy}{dv}\cdot\frac{d^2x}{dv^2}$$

ist. Damit also die Osculationsebene durch die Normale geht, muss

sein $\alpha . A + \beta . B + \gamma . C = 0$. Durch diese Gleichung transformirt sich der Nenner in dem Ausdrucke für r, welcher $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$ ist: der Zähler ist einfach $\left(\frac{ds}{dv}\right)^3$ oder $(Eu'^2 + 2Fu' + G)^{\frac{3}{2}}$.

Es ist

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(A^2+B^2+C^2) - (\alpha A + \beta B + \gamma C)^2$$
$$= (\beta C - \gamma B)^2 + (\gamma A - \alpha C)^2 + (\alpha B - \beta A)^2,$$

d. i.
$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(E.G - F^2) = S^2,$$

wie wir den Ausdruck rechts kurz bezeichnen wollen.

Multiplicirt man daher Zähler und Nenner in dem Ausdrucke für r mit $\sqrt{E.G - F^2}$, so wird

$$r = \frac{\left(\frac{ds}{dv}\right)^3 . \sqrt{E.G - F^2}}{S}.$$

Es ist aber

$$\beta C - \gamma B =$$
$$\left(\frac{dz}{dv}\frac{d^2x}{dv^2} - \frac{dx}{dv}\frac{d^2z}{dv^2}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v}\right) - \left(\frac{dx}{dv}\frac{d^2y}{dv^2} - \frac{dy}{dv}\frac{d^2x}{dv^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)$$

das ist

$$\beta C - \gamma B = \frac{d^2x}{dv^2}\left(C.\frac{dz}{dv} + B.\frac{dy}{dv}\right) - \frac{dx}{dv}\left(C.\frac{d^2z}{dv^2} + B.\frac{d^2y}{dv^2}\right),$$

oder, wie man auch schreiben kann,

$$= \frac{d^2x}{dv^2}\left(A.\frac{dx}{dv} + B.\frac{dy}{dv} + C.\frac{dz}{dv}\right) - \frac{dx}{dv}\left(A.\frac{d^2x}{dv^2} + B.\frac{d^2y}{dv^2} + C.\frac{d^2z}{dv^2}\right).$$

Es ist aber, wenn man für $\frac{dx}{dv}$, $\frac{dy}{dv}$, $\frac{dz}{dv}$ ihre im vorigen Paragraphen aufgestellten Werthe substituirt: $A.\frac{dx}{dv} + B.\frac{dy}{dv} + C.\frac{dz}{dv} = 0$, und, wenn man die von $\frac{d^2x}{dv^2}$, $\frac{d^2y}{dv^2}$, $\frac{d^2z}{dv^2}$ einträgt, so wird:

$$A.\frac{d^2x}{dv^2} + B.\frac{d^2y}{dv^2} + C.\frac{d^2z}{dv^2} = Du'^2 + 2D'u' + D''.$$

Es wird somit

$$(\beta C - \gamma B)^2 = \left(\frac{dx}{dv}\right)^2 (Du'^2 + 2D'u' + D'')^2$$

und der Nenner

$$S = \sqrt{\left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dv}\right)^2}\,(Du'^2 + 2D'u' + D''),$$

und da

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dv}\right)^2} = \frac{ds}{dv} = (Eu'^2 + 2Fu' + G)^{\frac{1}{2}}$$

ist, so ist endlich: der Krümmungsradius eines jeden Normalschnitts

$$\varrho = \sqrt{E.G - F^2} \cdot \frac{E.u'^2 + 2F.u' + G}{D.u'^2 + 2D'.u' + D''}.$$

Die Bedingung für die Nabelpunkte ergiebt sich aus dieser Formel für ϱ auf der Stelle. Denn da für den Nabelpunkt alle ϱ einander gleich sein müssen, und die verschiedenen ϱ in einem Punkte sich nur durch die Grösse u' unterscheiden, so ist die gesuchte Bedingung: $\frac{E}{D} = \frac{F}{D'} = \frac{G}{D''}$.

§ 60.

Wir beantworten nun die Frage: Welches sind Maximum und Minimum von ϱ und zu welchen Werthen von u' gehören sie?

Da offenbar die $\sqrt{E.G - F^2}$ auf diese Frage des Maximums keinen Einfluss hat, sondern es sich nur um u' handelt, so wollen wir für einen Augenblick $\frac{\varrho}{\sqrt{E.G - F^2}} = t$ setzen, und jetzt die Maxima und Minima dieser Grösse t aufsuchen, so wie die Werthe von u', die ihnen entsprechen. Wir haben zu dem Ende die Gleichung für t, nämlich $t = \frac{E.u'^2 + 2F.u' + G}{D.u'^2 + 2D'.u' + D''}$ nach u' zu differentiiren und $\frac{dt}{du'} = 0$ zu setzen. Dadurch wird

$$(Du'^2 + 2D'u' + D'')(Eu' + F) - (Eu'^2 + 2Fu' + G)(Du' + D') = 0.$$

Diese Gleichung giebt die Werthe von u', welche zum Maximum und Minimum von t gehören, und die Gleichung für t, welche wir jetzt so schreiben können: $t = \frac{Eu' + F}{Du' + D'}$ giebt, wenn man in sie die beiden für u' gefundenen Werthe einträgt, das gesuchte Maximum oder Minimum.

Wir können aber auch für t eine Gleichung herstellen, welche von u' ganz frei ist.

Die Gleichung $Eu' + F = (Du' + D')t$ multipliciren wir auf beiden Seiten mit u', wodurch wir erhalten $Eu'^2 + Fu' = (Du'^2 + D'u')t$, und diese Gleichung subtrahiren wir von der zuerst für t aufgestellten $Eu'^2 + 2Fu' + G = (Du'^2 + 2D'u' + D'')t$, wodurch wir folgende zweite Gleichung für t erhalten $Fu' + G = (D'u' + D'')t$, aus welcher wir vermittelst der schon oben erwähnten Gleichung

$$Eu' + F = (Du' + D')t$$

die Grösse u' eliminiren. Dadurch entsteht folgende Gleichung für t: $(E - Dt)(G - D''t) - (F - D't)^2 = 0$, welche geordnet so lautet:

$$(DD'' - D'^2)t^2 - (ED'' - 2FD' + GD)t + EG - F^2 = 0,$$

und setzen wir endlich hierin statt $t\ \frac{\varrho}{\sqrt{E.G-F^2}}$, so erhalten wir folgende quadratische Gleichung in ϱ, deren Wurzeln die beiden Hauptkrümmungsradien ϱ_1 und ϱ_2 sind:

$$\varrho^2(DD''-D'^2)-\varrho\sqrt{E.G-F^2}\,(ED''-2FD'+GD)+(EG-F^2)^2=0.$$

Die zugehörigen Werthe von u' erhält man aus:

$$u'^2(FD-ED')+u'(GD-ED'')+GD'-FD''=0.$$

§ 61.

Das Product der beiden Hauptkrümmungsradien ist offenbar $\varrho_1.\varrho_2=\frac{(EG-F^2)^2}{DD''-D'^2}$.

Gauss hat nun gezeigt, dass der Nenner dieses Ausdrucks eine merkwürdige Umformung zulässt, dass er sich nämlich ganz durch E, F, G und die Differentialquotienten dieser Grössen nach u und v ausdrücken lässt. Disquisitiones generales circa superficies curvas. Comm. Gott. rec. 1828. Wir erwähnen für unsern Zweck einen Satz aus der Algebra, welcher ebenfalls von Gauss herrührt, dass nämlich das Product zweier Determinanten sich wieder als Determinante darstellen lässt, z. B. zwei Determinanten des dritten Grades:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a\alpha+a'\beta+a''\gamma & b\alpha+b'\beta+b''\gamma & c\alpha+c'\beta+c''\gamma \\ a\alpha'+a'\beta'+a''\gamma' & b\alpha'+b'\beta'+b''\gamma' & c\alpha'+c'\beta'+c''\gamma' \\ a\alpha''+a'\beta''+a''\gamma'' & b\alpha''+b'\beta''+b''\gamma'' & c\alpha''+c'\beta''+c''\gamma'' \end{vmatrix}.$$

Es ist nun

$$D=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \qquad D''=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \quad \text{und}$$

$$D'=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u.\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u.\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u.\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u.\partial v} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u.\partial v} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial u.\partial v} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Bildet man nun DD'' und D'^2, so kommt man ausser bekannten auf Ausdrücke von folgender Art, wobei Σ die Summe von Gliedern

bezeichnet, welche in Bezug auf y und z so gebildet sind, wie das unter dem Symbol Σ stehende in Beziehung auf x:

$$\sum \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, \text{ ferner } \sum \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$$

$$= \sum \left\{ \frac{\partial \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \right)}{\partial v} - \frac{\partial^2 x}{\partial u . \partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \right\} = \sum \left\{ \frac{\partial \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \right)}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial \left(\left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 \right)}{\partial u} \right\},$$

$$\sum \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \frac{1}{2} \cdot \sum \frac{\partial \left(\left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 \right)}{\partial v}, \quad \sum \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{2} \sum \frac{\partial \left(\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 \right)}{\partial u},$$

$$\sum \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} = \sum \left\{ \frac{\partial \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \right)}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial \left(\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 \right)}{\partial v} \right\}; \quad \sum \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u . \partial v} \right)^2,$$

ferner

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u . \partial v} = \frac{1}{2} \sum \frac{\partial \left(\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 \right)}{\partial v}, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u . \partial v} = \frac{1}{2} \sum \frac{\partial \left(\left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 \right)}{\partial u};$$

also wird, weil man das Zeichen Σ unter das Differentialzeichen ∂ setzen kann:

$$D . D'' = \begin{vmatrix} \sum \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial v} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u} & E & F \\ \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} & F & G \end{vmatrix} \text{ und}$$

$$D'^2 = \begin{vmatrix} \sum \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u . \partial v} \right)^2 & \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} & \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} & E & F \\ \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} & F & G \end{vmatrix}.$$

Bildet man nun die Differenz $D . D'' - D'^2$, so erhält man ausser Gliedern, welche nur die Grössen E, F, G und deren Differentialquotienten enthalten, noch folgende Differenz:

$$\sum \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} (EG - F^2) - \sum \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u . \partial v} \right)^2 (EG - F^2).$$

Es kommt also nur noch darauf an, folgende

$$\sum \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u . \partial v} \right)^2 \right)$$

durch die genannten Grössen auszudrücken.

Das Product

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \right)}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial \left(\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 \right)}{\partial v}$$

giebt, nach v differentiirt

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \frac{\partial^3 x}{\partial u^2 . \partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial^2 \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}\right)}{\partial u . \partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \left(\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2\right)}{\partial v^2}.$$

Das Product

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u . \partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{2} \frac{\partial \left(\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right)}{\partial u}$$

giebt, nach u differentiirt

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u . \partial v}\right)^2 + \frac{\partial^3 x}{\partial u^2 . \partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \left(\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right)}{\partial u^2}.$$

Diese Gleichung von der vorigen subtrahirt, ergiebt

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u . \partial v}\right)^2 = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \left(\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}\right)}{\partial u \, \partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \left(\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2\right)}{\partial v^2},$$

also wird die gesuchte

$$\sum \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u . \partial v}\right)^2\right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial u . \partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial v^2}.$$

Es wird also endlich

$$\begin{aligned} 4(DD'' - D'^2) = & \; E\left(\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial v} - 2\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial v} + \left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2\right) \\ & + F\left(\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial v} - \frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial u} - 2\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial u} - 2\frac{\partial E}{\partial v} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} + 4\frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial v}\right) \\ & + G\left(\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial u} - 2\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial E}{\partial u} + \left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2\right) \\ & - 2(EG - F^2)\left(\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial u . \partial v} + \frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right). \end{aligned}$$

§ 62.

Wenn wir nun zwei Flächen betrachten, deren Gleichungen folgende beiden Systeme sein mögen: $x = f(u,v)$ $y = f_1(u,v)$ $z = f_2(u,v)$ und $x = F(u,v)$ $y = F_1(u,v)$ $z = F_2(u,v)$, so erhalten wir für jedes Werthepaar u, v einen bestimmten Punkt auf der einen und einen bestimmten Punkt auf der andern Fläche. Es entspricht also im Allgemeinen jedem Punkt der einen Fläche ein Punkt der andern Fläche. Dieses Correspondiren der Punkte ist ein ganz eigentümliches, wenn der Fall eintritt, dass die Grössen, welche wir oben mit E, F, G bezeichnet haben, in beiden Flächen denselben Werth haben. Alsdann ist nämlich der Ausdruck für das Curvenelement $\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}$ auf der einen Fläche identisch gleich dem für das Element der correspondirenden Curve auf der andern Fläche.

Folglich haben entsprechende Curven auf beiden Flächen gleiche Längen, sobald die drei Grössen E, F, G für beide Flächen dieselben sind. Da aber in diesem Falle die eine Curve gleich der andern ist, so kann man sie immer sich so gebogen denken, dass sie auf die erste gelegt werden kann. Bestehen also die erwähnten drei Bedingungen, so kann man sich die eine Fläche durch Biegung der andern in der Art entstanden denken, dass keine Curve bei der Biegung ihre Länge verändert hat.

Da andrerseits nach dem vorigen Paragraph das Product der beiden Hauptkrümmungsradien allein von den Grössen E, F, G abhängt, so muss es, wenn diese Grössen für die beiden vorliegenden Flächen identisch sind, ebenfalls für beide Flächen gleich sein und zwar in je zwei entsprechenden Punkten der beiden Flächen, d. h. in je zwei Punkten, welche zu demselben Werthepaar u, v gehören. Demnach haben wir folgenden, von Gauss aufgestellten, merkwürdigen

Lehrsatz: Wenn von zwei Flächen die eine eine Biegung der andern ist, so ist in je zwei entsprechenden Punkten das Product der Hauptkrümmungsradien für beide Flächen gleich.

Anmerkung. Dieser Lehrsatz führt auf die Untersuchung derjenigen Eigenschaften der Flächen, welche bleiben, wenn man die Flächen biegt. Dahin gehört z. B. folgender Satz: Wenn man auf einer Fläche zwei Punkte A und B durch eine kürzeste Linie verbindet, so bleibt diese Linie die kürzeste zwischen den beiden Punkten, wie man auch die Fläche biegen mag.

Ein ganz specieller Fall dieser Biegung der Flächen ist schon von Euler behandelt worden, und nach ihm von Monge und einer grossen Anzahl Mathematiker. Diese haben nämlich schon früher diejenigen Flächen betrachtet, welche durch Biegung einer Ebene entstehen. Solche Flächen nennt man abwickelbare Flächen, weil man ihre einzelnen Theile ohne Falte und Riss in eine Ebene aufrollen kann. Für sie folgt sofort, dass das Product ihrer beiden Hauptkrümmungsradien unendlich ist, weil bei einer Ebene alle, auch die beiden Hauptkrümmungsradien unendlich sind. Nach der Gleichung für die beiden Hauptkrümmungsradien (§ 50.) ist aber ihr Product gleich $\frac{(1+p^2+q^2)^2}{rt-s^2}$. Dieser Ausdruck wird allgemein gleich unendlich, wenn der Nenner Null wird. Dies ist die Differentialgleichung aller abwickelbaren Flächen, nämlich $rt-s^2=0$ oder $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x.\partial y}\right)^2=0$. Diese partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung integrirt, giebt die endliche Gleichung aller abwickelbaren Flächen.

§ 63.

Ein zweiter Satz von Gauss beantwortet die sich leicht darbietende Frage:

Giebt es für die Flächen etwas, was der Krümmung der Curven entspricht?

Untersuchungen, die sich auf Elasticität beziehen, haben einige Mathematiker veranlasst, den Ausdruck $\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}$ als Krümmung der Fläche anzusehen; aber diese Analogie ist, vom geometrischen Standpunkte aus wenigstens, nicht stichhaltig; Gauss hat eine vollständige Analogie aufgefunden durch folgende Untersuchung:

Man denke sich eine ebene Curve und irgendwo mit dem Radius 1 einen Kreis beschrieben, siehe Fig. 19. Man ziehe zwei Normalen der Curve in benachbarten Punkten und dazu zwei parallele Radien des Kreises. Der Curvenbogen zwischen den beiden Normalen heisse s, der entsprechende d. h. zwischen den beiden parallel gezogenen Radien eingeschlossene Kreisbogen heisse σ. Dann ist offenbar der Winkel der beiden Normalen gleich dem Winkel der beiden Radien, d. h. gleich σ. Der Winkel der beiden Normalen ist aber andrerseits derselbe, welchen die zugehörigen beiden Tangenten der Curve mit einander bilden: mithin ist σ gleich dem Contingenzwinkel. Daraus geht hervor, dass man die Erklärung des Krümmungsradius, die man gewöhnlich giebt, nämlich Bogenelement durch Contingenzwinkel, auch so angeben kann: der Krümmungsradius einer Curve ist gleich dem unendlich kleinen Bogen s, dividirt durch den unendlich kleinen Bogen σ des Kreises; und folglich ist die Krümmung der Curven $= \lim \frac{\sigma}{s}$.

Dies lässt auf der Stelle eine Erweiterung für die Flächen zu. Man denke sich irgend eine Fläche und eine Kugel vom Radius 1. Auf der Fläche nehme man irgend ein begränztes Stück an und ziehe entlang der Gränze desselben Normalen zur Fläche. Man ziehe ferner vom Mittelpunkte der Kugel Strahlen, die diesen Normalen parallel sind, wodurch man auf der Kugel ebenfalls ein begränztes Stück erhält. Das Flächenstück sei wiederum s, das auf der Kugel σ. Denkt man sich beide Stücke unendlich klein, so nimmt Gauss wiederum den Quotienten $\frac{\sigma}{s}$ als Krümmung der Fläche an; also Krümmung der Fläche $= \lim \frac{\sigma}{s}$.

Diesen Quotienten wollen wir nun in der gewöhnlichen Art ausdrücken und schieben für diesen Zweck noch Einiges ein.

Die Gleichung der Kugel, deren Radius 1 ist, sei $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$.

Denken wir uns die Coordinaten $\xi\, \eta\, \zeta$ als Function zweier neuen Variabeln u und v gegeben, so können wir (nach § 59.) die Cosinus der Winkel, welche die Normale N mit den drei Axen bildet, so schreiben:

$$\cos(N, x) = \lambda . A = \lambda \left\{\frac{\partial \eta}{\partial u} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial v} - \frac{\partial \eta}{\partial v} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial u}\right\}$$

$$\cos(N, y) = \lambda . B = \lambda \left\{\frac{\partial \zeta}{\partial u} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\partial \zeta}{\partial v} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial u}\right\}$$

$$\cos(N, z) = \lambda . C = \lambda \left\{\frac{\partial \xi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial v} - \frac{\partial \xi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial u}\right\}$$

Da aber der Radius zugleich die Normale der Kugel ist, und er durch den Anfangspunkt und den Punkt $\xi\, \eta\, \zeta$ geht, so sind diese drei Cosinus andrerseits $\frac{\xi}{r}, \frac{\eta}{r}, \frac{\zeta}{r}$ oder ξ, η, ζ. Da nun $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ ist, so muss auch $\lambda^2 \{A^2 + B^2 + C^2\} = 1$ sein. Andrerseits muss auch, weil $\xi . \xi + \eta . \eta + \zeta . \zeta = 1$ ist, $\lambda \{\xi A + \eta B + \zeta C\} = 1$ sein. Daraus folgt: $\xi A + \eta B + \zeta C = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$; und somit auch

$$\{\xi A + \eta B + \zeta C\}\, du\, dv = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv,$$

d. h. (§. 55.) gleich dem Flächenelement irgend einer Fläche, welche hier eben wegen der Gleichung $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ die Kugel ist. Wir haben also: Drückt man die drei Coordinaten ξ, η, ζ der Kugel $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ durch zwei Grössen u und v aus, so ist das Oberflächenelement der Kugel gleich

$$\left\{\xi \left(\frac{\partial \eta}{\partial u} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial v} - \frac{\partial \eta}{\partial v} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial u}\right) + \eta \left(\frac{\partial \zeta}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\partial \zeta}{\partial v} \frac{\partial \xi}{\partial u}\right) + \zeta \left(\frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \eta}{\partial v} - \frac{\partial \xi}{\partial v} \frac{\partial \eta}{\partial u}\right)\right\} du\, dv.$$

Diese Formel wollen wir noch ein wenig transformiren und zwar mittelst folgender Betrachtung: es seien A, B, C drei ganz beliebige Functionen von u und v: dann kann man offenbar immer unser

$$\xi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad \eta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad \zeta = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

setzen; denn alsdann ist $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$. Bezeichnen wir nun $\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ durch λ, so wird

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = \lambda \frac{\partial A}{\partial u} + A \frac{\partial \lambda}{\partial u} \quad \frac{\partial \xi}{\partial v} = \lambda \frac{\partial A}{\partial v} + A \frac{\partial \lambda}{\partial v}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial u} = \lambda \frac{\partial B}{\partial u} + B \frac{\partial \lambda}{\partial u} \quad \frac{\partial \eta}{\partial v} = \lambda \frac{\partial B}{\partial v} + B \frac{\partial \lambda}{\partial v}$$

u. s. w., folglich wird

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \eta}{\partial v} - \frac{\partial \eta}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial v} =$$

$$\lambda^2 \left\{\frac{\partial A}{\partial u} \frac{\partial B}{\partial v} - \frac{\partial A}{\partial v} \frac{\partial B}{\partial u}\right\} + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial u} \left\{A \frac{\partial B}{\partial v} - B \frac{\partial A}{\partial v}\right\} + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial v} \left\{B \frac{\partial A}{\partial u} - A \frac{\partial B}{\partial u}\right\},$$

und ähnlich

$$\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial v}-\frac{\partial \zeta}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial v}=$$

$$\lambda^2\left\{\frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial C}{\partial v}-\frac{\partial B}{\partial v}\frac{\partial C}{\partial u}\right\}+\lambda\frac{\partial \lambda}{\partial u}\left\{B\frac{\partial C}{\partial v}-C\frac{\partial B}{\partial v}\right\}+\lambda\frac{\partial \lambda}{\partial v}\left\{C\frac{\partial B}{\partial u}-B\frac{\partial C}{\partial u}\right\},$$

und

$$\frac{\partial \zeta}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}-\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial v}=$$

$$\lambda^2\left\{\frac{\partial C}{\partial u}\frac{\partial A}{\partial v}-\frac{\partial C}{\partial v}\frac{\partial A}{\partial u}\right\}+\lambda\frac{\partial \lambda}{\partial u}\left\{C\frac{\partial A}{\partial v}-A\frac{\partial C}{\partial v}\right\}+\lambda\frac{\partial \lambda}{\partial v}\left\{A\frac{\partial C}{\partial u}-C\frac{\partial A}{\partial u}\right\}.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen links mit ζ, ξ, η und rechts mit den äquivalenten λC, λA, λB, und addirt dann, so fallen rechts alle Glieder weg, welche dann in λ^2 multiplicirt sind, und es wird folglich, wenn man noch statt λ seinen Werth $\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ einsetzt

$$\xi\left(\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial v}-\frac{\partial \zeta}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial v}\right)+\eta\left(\frac{\partial \zeta}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}-\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial v}\right)+\zeta\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial v}-\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)=$$

$$\frac{1}{(A^2+B^2+C^2)^{\frac{3}{2}}}\left\{A\left(\frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial C}{\partial v}-\frac{\partial B}{\partial v}\frac{\partial C}{\partial u}\right)+B\left(\frac{\partial C}{\partial u}\frac{\partial A}{\partial v}-\frac{\partial C}{\partial v}\frac{\partial A}{\partial u}\right)\right.$$
$$\left.+C\left(\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial B}{\partial v}-\frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial B}{\partial u}\right)\right\}.$$

Was nun für beliebige Functionen A, B, C gilt, muss auch für $A=\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial v}-\frac{\partial \zeta}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial v}$ u. s. w. gelten, d. h. man erhält das Oberflächenelement der Kugel

$$=\frac{A\left(\frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial C}{\partial v}-\frac{\partial B}{\partial v}\frac{\partial C}{\partial u}\right)+B\left(\frac{\partial C}{\partial u}\frac{\partial A}{\partial v}-\frac{\partial C}{\partial v}\frac{\partial A}{\partial u}\right)+C\left(\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial B}{\partial v}-\frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial B}{\partial u}\right)}{(A^2+B^2+C^2)^{\frac{3}{2}}}\,du\,dv,$$

worin A, B, C die oben festgesetzten Werthe haben.

Das Element der vorliegenden Oberfläche ist aber $=(A^2+B^2+C^2)^{\frac{1}{2}}du\,dv$. Dass dies zugleich zwei entsprechende Elemente auf der Oberfläche und der Kugel sind, übersieht man daraus, dass die Gleichungen der Normale der Fläche

$$\frac{\xi-x}{A}=\frac{\eta-y}{B}=\frac{\zeta-z}{C}$$

sind, also die einer zu ihr durch den Anfangspunkt der Coordinaten, d. h. durch den Kugelmittelpunkt gezogenen Parallele $\frac{\xi}{A}=\frac{\eta}{B}=\frac{\zeta}{C}$, und wenn ξ, η, ζ Punkte der Kugel sein sollen, so muss

$$\xi=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\quad \eta=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\quad \zeta=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

sein, wie oben. Demgemäss findet man folgenden Ausdruck für die

Krümmung einer Fläche

$$= \frac{A\left(\frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial C}{\partial v} - \frac{\partial B}{\partial v}\frac{\partial C}{\partial u}\right) + B\left(\frac{\partial C}{\partial u}\frac{\partial A}{\partial v} - \frac{\partial C}{\partial v}\frac{\partial A}{\partial u}\right) + C\left(\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial B}{\partial v} - \frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial B}{\partial u}\right)}{(A^2 + B^2 + C^2)^2}.$$

Um diesen Ausdruck zu interpretiren, nehmen wir an, die Gleichungen der Fläche seien in folgender Form gegeben

$$z = f(u, v) \quad x = u \quad y = v.$$

Alsdann wird $A = \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial y}$ oder $= -\frac{\partial z}{\partial x}$ oder $A = -p$; ebenso $B = -q$, $C = 1$, folglich

$$\frac{\partial A}{\partial u} = -r, \; \frac{\partial A}{\partial v} = -s, \; \frac{\partial B}{\partial u} = -s, \; \frac{\partial B}{\partial v} = -t, \; \frac{\partial C}{\partial u} \text{ und } \frac{\partial C}{\partial v} = 0.$$

Dadurch wird die Krümmung der Fläche

$$\frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} \text{ d. i. } = \frac{1}{\varrho_1 \cdot \varrho_2}$$

oder gleich dem reciproken Werth des Products der beiden Krümmungsradien.

Wir haben zugleich den Satz gefunden: Wenn man ein unendlich kleines Oberflächenelement durch einen beliebigen Contour begränzt, und man zieht die Strahlen der Hilfskugel, die den Normalen der Fläche längs des Contours parallel sind, wodurch man ebenfalls ein Oberflächenelement auf der Kugel erhält, so ist der Quotient $\frac{\text{Kugeloberflächenelement}}{\text{Oberflächenelement}} = \frac{1}{\text{Product der beid. Hauptkrümmungsradien}}$ oder in unsern Zeichen $\frac{\sigma}{s} = \frac{1}{\varrho_1 \cdot \varrho_2}$. Denn beide Ausdrücke geben die Krümmung an.

Dies ist ganz analog dem, was wir bei den Curven gefunden haben.

Verbindet man dieses Resultat mit dem des vorigen Paragraphen, so findet sich:

Wenn man eine Fläche biegt, so ändert sich ihre Krümmung (in diesem Sinne genommen) nicht.

§ 64.

Von den Krümmungscurven. Man denke sich in irgend einem Punkte a auf der Fläche die beiden Haupttangenten der Fläche gezogen, nämlich diejenigen beiden Tangenten, welche mit der Normale zusammen die Hauptschnitte bilden. Diese beiden Tangenten stehen auf einander normal. Jede der beiden Tangenten hat mit der Fläche noch einen zweiten unendlich nahen Punkt gemein: dieser sei bei der einen Tangente b. Zieht man in diesem Punkte b wiederum die beiden Haupttangenten, so wird die eine von ihnen mit

der Tangente, die durch a und b geht, beinahe zusammenfallen, die andre auf dieser beinahe normal stehen. Die beiden zweiten Haupttangenten sind den ersten beiden zwar nicht parallel, weichen aber nur unendlich wenig von ihnen ab. Geht man ebenso auf derjenigen der zweiten Haupttangenten, welche der Tangente ab entspricht, vom Punkte b zu dem unendlich nahen Punkte c, welchen sie noch mit der Fläche gemein hat, und zieht auch in diesem die beiden Haupttangenten, so gilt von ihnen in Bezug auf das System der zweiten Haupttangenten, was von diesem in Bezug auf das System der beiden ersten gilt. Geht man daher in der Haupttangente, welche der bc und ab entspricht, vom Punkte c zu dem auf ihr liegenden benachbarten Punkte d und fährt immer so fort, so bekommt man für den Ausgangspunkt a aus der ersten Haupttangente eine Curve auf der Fläche, und folglich auch eine aus der zweiten Haupttangente. Die charakteristische Eigenschaft dieser Curven ist, dass jede ihrer Tangenten Haupttangente in dem betreffenden Punkte ist. Im Ausgangspunkte schneiden sich daher die zu ihm gehörigen Curven normal. Man kann folglich, wenn man nacheinander alle Punkte der Fläche zu Ausgangspunkten wählt, auf jeder Fläche zwei Systeme sich rechtwinklig schneidender Curven ziehen, die die Eigenschaft haben, dass sie in jedem Punkt die Haupttangenten der Fläche bestimmen. Diese Curven nennt man Krümmungscurven.

Das einfachste Beispiel bieten die Umdrehungsflächen dar. Die Hauptschnitte der Umdrehungsfläche sind der Meridian und derjenige Schnitt, welcher den Parallelkreis berührt und durch die Normale geht. Krümmungscurven sind also der Meridian und der Parallelkreis.

Bei einem geraden Cylinder mit einer beliebigen Basis ist der eine Hauptschnitt jedesmal eine Seite, der zweite eine Ebene parallel zur Basis. Die Krümmungscurven sind hier die Seiten und die der Basis parallel gehenden Curven.

Aufgabe. Die Gleichung der Krümmungscurven aufzustellen.

Wir nehmen dazu die Form an: x, y, z gegeben als Functionen von u und v. Es ist alsdann unsre Aufgabe nur, eine Gleichung zwischen u und v zu finden. Die Bedingung der Krümmungscurve ist die, dass ihre Tangenten Haupttangenten der Fläche sind. Die Tangente einer Curve in irgend einem Punkte hängt aber (§ 56.) ab von dem betreffenden Werthe des $\frac{du}{dv}$. Die Bedingung dafür, dass eine Linie, hier die Tangente an die Krümmungscurve, Haupttangente an die Fläche sei, ist aber nach § 60. extr.:

$$u'^2 (FD - ED') + u' (GD - ED'') + GD' - FD'' = 0.$$

Dies ist daher zugleich die Differentialgleichung für die

Krümmungscurven. Diese Gleichung zweiten Grades erster Ordnung löse man nach $\frac{du}{dv}$ auf. Die beiden verschiedenen Werthe, welche man dafür findet, hat man zu integriren, und erhält dadurch zwei endliche Gleichungen, von denen jede wegen des in ihr enthaltenen willkürlichen Parameters ein System von Curven darstellt; und zwar bezieht sich die eine Gleichung auf das eine System von Krümmungscurven, die andere auf das zweite.

Ist z als Function von x und y gegeben, d. h. hat man $z = f(x, y)$ oder $z = f(u, v)$ $x = u$ $y = v$, so wird $\frac{du}{dv} = \frac{dx}{dy}$ $A = -p$ $B = -q$ $C = 1$ $E = 1 + p^2$ $F = pq$ $G = 1 + q^2$ $D = r$ $D' = s$ $D'' = t$; also wird die Gleichung der beiden Krümmungscurven für diese Form der Gleichung der Fläche folgende:

$$dx^2(pqr - (1+p^2)s) + dx.dy((1+q^2)r - (1+p^2)t) + dy^2((1+q^2)s - pqt) = 0.$$

Hierin sind p, q, r, s, t Functionen von x und y allein; ein etwa darin vorkommendes z hat man mittelst der Gleichung der Fläche $z = f(x, y)$ zu eliminiren. Integrirt man daher die gefundene Differentialgleichung, so erhält man, allerdings nicht die Krümmungscurven selbst, sondern ihre Projectionen auf die Ebene der xy, zu welchen man die Gleichung der Fläche zu nehmen hat, um die Gleichungen der Krümmungscurven selbst zu finden.

§ 65.

Beispiel 1. Von der Schraubenfläche (§ 53.)

$$z = \alpha . u \quad y = v . \sin u \quad x = v . \cos u$$

die Krümmungscurven zu finden.

Man hat

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \alpha \quad \frac{\partial y}{\partial u} = v \cos u \quad \frac{\partial x}{\partial u} = -v \sin u$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = -v \sin u \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -v \cos u$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 0 \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \sin u \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \cos u$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \, \partial v} = 0 \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u \, \partial v} = \cos u \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u \, \partial v} = -\sin u.$$

Mithin wird: $A = -\alpha \sin u$ $B = \alpha \cos u$ $C = -v$ $E = \alpha^2 + v^2$ $F = 0$ $G = 1$ $D = 0$ $D' = \alpha$ $D'' = 0$. Also die Gleichung für die Krümmungscurven $-u'^2 \alpha (\alpha^2 + v^2) + \alpha = 0$ oder

$$u'^2 = \frac{1}{\alpha^2 + v^2} \text{ oder } du = \pm \frac{dv}{\sqrt{\alpha^2 + v^2}}.$$

Demnach ist

$$u = c \pm \int \frac{dv}{\sqrt{\alpha^2 + v^2}} = c \pm l\,(v + \sqrt{\alpha^2 + v^2}).$$

Diese Aufgabe ist bedeutend schwieriger zu lösen für die Form $z = \alpha.\,\text{Arc tg}\,\frac{y}{x}\cdot$

2) Die Krümmungscurven auf den beiden Paraboloiden zu suchen, deren Gleichungen man zusammen so schreiben kann $2z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}\cdot$ Hier ist $p = \frac{x}{a}$ $q = \frac{y}{b}$ $r = \frac{1}{a}$ $s = 0$ $t = \frac{1}{b}\cdot$ Demnach wird

$$dx^2\,\frac{xy}{a^2 b} + dx\,dy \left\{\frac{1 + \frac{y^2}{b^2}}{a} - \frac{1 + \frac{x^2}{a^2}}{b}\right\} - dy^2\,\frac{xy}{a\,b^2} = 0$$

oder, wenn man mit $a^2 b^2$ multiplicirt

$$bxy\,dx^2 + dx\,dy\left\{ab\,(b-a) + ay^2 - bx^2\right\} - axy\,dy^2 = 0.$$

Um diese Gleichung zu integriren, was geschehen kann, indem man sie auf die sogenannte Clairautsche zurückführt, deren Normalform $y = y'x + \varphi\,(y')$ wo $y' = \frac{dy}{dx}$ und deren Integral $y = c.\,x + \varphi\,(c)$ ist, multipliciren wir unsre Gleichung mit $x.\,y$, worauf wir sie so schreiben können:

$$b.\,y^2\,(x.\,dx)^2 + \left\{a\,b\,(b-a) + ay^2 - b\,x^2\right\}(x\,dx)(y\,dy) - a\,x^2\,(y.\,dy)^2 = 0,$$

oder $x^2 = \xi$, $y^2 = \eta$ gesetzt,

$$b.\,\eta\,(d\xi)^2 + \left\{ab\,(b-a) + a\,\eta - b\,\xi\right\} d\xi.\,d\eta - a\,\xi.\,(d\eta)^2 = 0.$$

Hieraus aber findet man:

$$\eta\left\{b.\,d\xi^2 + a\,d\xi\,d\eta\right\} = \xi\left\{b\,d\xi\,d\eta + a\,d\eta^2\right\} + ab\,(a-b)\,d\xi\,d\eta$$

oder endlich, wenn man $\frac{d\eta}{d\xi} = \eta'$ setzt,

$$\eta = \xi.\,\eta' + ab\,(a-b)\,\frac{\eta'}{b + a\eta'},$$

und demgemäss hat man

$$\eta = C\xi + ab\,(a-b)\,\frac{C}{b + aC} \text{ oder } y^2 = Cx^2 + \frac{ab\,(a-b)\,C}{b + a\,C},$$

wo C die willkürliche Constante ist.

Diese Gleichung liefert die Projectionen der Krümmungscurven des elliptischen oder hyperbolischen Paraboloids, je nachdem a und b gleichstimmig oder entgegengesetzt sind. Diese Projectionen sind Ellipsen, wenn C negativ ist, Hyperbeln, wenn C positiv ist. Man übersieht auf der Stelle, dass in der That durch jeden Punkt der Fläche zwei Krümmungscurven hindurchgehen. Denn will man die

willkürliche Constante C so bestimmen, dass die Krümmungscurve durch den gegebenen Punkt $x_0\, y_0\, z_0$ der Fläche hindurchgeht, so geschieht dies, indem man in die für die Krümmungscurven gefundene Gleichung y_0 und x_0 statt y und x einsetzt, und danach den Werth der Constanten C bestimmt, welcher somit ein doppelter wird, weil sich eine Gleichung zweiten Grades für C ergiebt.

Ganz ähnlich findet man die Krümmungscurven derjenigen Flächen zweiten Grades, welche einen Mittelpunkt haben.

§ 66.

Wir lösen nun noch das Problem, die Differentialgleichung der Krümmungscurven für die Form $F(x, y, z) = 0$ abzuleiten. Man denke sich auf einer Fläche eine Curve gezogen, und gehe von einem Punkte der Curve x, y, z auf den nächsten $x + dx, y + dy, z + dz$ über. Dadurch, dass beide Punkte auf derselben Fläche nicht nur, sondern auf derselben Curve liegen sollen, haben die dx, dy, dz nicht beliebige unendlich kleine Werthe, sondern sie müssen ausser der Differentialgleichung der Fläche auch noch der der Curve genügen. Man sagt in diesem Falle: man führt die Differentiation aus entlang der Curve.

Zur Auffindung der Hauptschnitte und Hauptkrümmungsradien dienten uns früher die Formeln (9) § 48., von denen die erste ist:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cos\alpha + \frac{\partial^2 F}{\partial x . \partial y}\cos\beta + \frac{\partial^2 F}{\partial x . \partial z}\cos\gamma + \varepsilon . \cos\alpha + \varepsilon' . \frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

Hierin sind α, β, γ die Winkel, welche die Tangente an einem der beiden Hauptschnitte mit den drei Axen bildet. Diese Tangenten sind zugleich die Tangenten an die Krümmungscurve. Die Cosinus dieser Winkel sind aber $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, wenn sich dx, dy, dz auf Verrückungen innerhalb der Krümmungscurven beziehen. Setzen wir diese Werthe in die obige Gleichung ein, so wird sie sich nun auf die Krümmungscurve beziehen. Schreiben wir dabei statt $\varepsilon' ds$ wieder ε' der Kürze wegen, so wird die Gleichung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} . dx + \frac{\partial^2 F}{\partial x . \partial y}\, dy + \frac{\partial^2 F}{\partial x . \partial z} . dz + \varepsilon . dx + \varepsilon' . \frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

oder

$$d\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) + \varepsilon . dx + \varepsilon' . \frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

Die andern beiden Gleichungen in (9) § 48. geben entsprechend

$$d\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) + \varepsilon . dy + \varepsilon' . \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

und

$$d\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) + \varepsilon . dz + \varepsilon' . \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Eliminirt man ε und ε', so bekommt man

$$d\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\left\{\frac{\partial F}{\partial y} . dz - \frac{\partial F}{\partial z} . dy\right\} + d\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\left\{\frac{\partial F}{\partial z} . dx - \frac{\partial F}{\partial x} . dz\right\}$$
$$+ d\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\left\{\frac{\partial F}{\partial x} . dy - \frac{\partial F}{\partial y} . dx\right\} = 0.$$

Entwickelt man die $d\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)$, $d\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)$, $d\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)$, so erhält man einen Ausdruck, in welchem $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ in der zweiten Dimension vorkommen. Daraus hat man dz und z zu eliminiren, um auf eine Gleichung zu kommen, die nur x und y enthält. Diese Elimination geschieht mittelst der Gleichung der Fläche $F(x, y, z) = 0$ und ihrer Differentialgleichung $\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} = 0$, weil nicht blos der Ausgangspunkt der Krümmungscurven, sondern alle ihre Punkte auf der Fläche liegen sollen.

Hieraus kann man noch eine andere Gestalt der Gleichung der Krümmungscurven für den Fall leicht ableiten, dass die Gleichung der Fläche in der Form $z = f(x, y)$ gegeben ist. Es ist nämlich alsdann $F = f(x, y) - z$, also $\frac{\partial F}{\partial x} = p$, $\frac{\partial F}{\partial y} = q$, $\frac{\partial F}{\partial z} = -1$, also wird hiernach die Gleichung der Krümmungscurven

$$dp\left\{q dz + dy\right\} + dq\left\{-dx - p dz\right\} = 0$$

oder, wie man auch schreiben kann

$$\frac{p dz + dx}{dp} = \frac{q dz + dy}{dq}.$$

Diese Gleichung ist natürlich identisch dieselbe wie die in § 64.; denn man hat $dz = p dx + q dy$, $dp = r dx + s dy$, $dq = s dx + t dy$. Sie ist bequemer für einige Untersuchungen, z. B. für die Lösung der folgenden Frage.

§ 67.

Ist es möglich, dass eine Fläche eine ebene Krümmungscurve haben kann? und in welchem Falle? Angenommen, es gebe in einer Fläche eine ebene Krümmungscurve, so machen wir die Ebene derselben zur xy Ebene. Dadurch wird offenbar $dz = 0$, was auch dann noch der Fall ist, wenn die Curve in einer Ebene liegt, welche der xy Ebene parallel liegt; denn alsdann ändert sich z nicht. Die Gleichung der Krümmungscurven (v. § 66. extr.)

geht also über in $\frac{dx}{dp} = \frac{dy}{dq}$. Ist die Gleichung der Fläche $z = f(x, y)$, so ist die Gleichung der ebenen Curve $0 = f(x, y)$, und wenn man dies differentiirt, so wird $0 = p.dx + q.dy$; also wird $\frac{dx}{dy}$ einerseits $= -\frac{q}{p}$, andrerseits $= \frac{dp}{dq}$; folglich hat man für diese Flächen die Gleichung $p.dp + q.dq = 0$, welche integrirt giebt $p^2 + q^2 = c$; d. h. die beiden Functionen p und q müssen für diesen Durchschnitt mit der xy Ebene die Eigenschaft haben, dass die Summe ihrer Quadrate constant ist. Man kann dies auch geometrisch so ausdrücken:

Da die Gleichung der Tangentialebene T folgende ist:

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y),$$

also

$$\cos(T, xy \text{ Ebene}) = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

so muss in gegenwärtigem Falle die Tangentialebene gegen die xy Ebene oder gegen den Schnitt eine constante Neigung haben. Mit andern Worten:

Wenn eine Krümmungscurve eben ist, so bilden die Tangentialebenen entlang der Krümmungscurve mit der Ebene der Krümmungscurve einen constanten Winkel.

Der Satz gilt auch umgekehrt: Bilden die Tangentialebenen einer Fläche entlang einer ebenen Curve derselben mit der letzteren einen constanten Winkel, so ist dies eine Krümmungscurve.

Beweis. Die ebene Curve sei die xy Ebene; dann findet folgende Gleichung statt: $dz = 0$ oder $p.dx + q.dy = 0$. Da ferner die Tangentialebene mit dieser Schnittebene einen constanten Winkel bildet, so ist ($p^2 + q^2 = c$ oder) $pdp + qdq = 0$. Diese beiden Gleichungen befriedigen aber die am Ende des vorigen Paragraphen aufgestellte Gleichung der Krümmungscurven.

Bei den Rotationsflächen umhüllen die Tangentialebenen entlang des Meridians einen Cylinder, von welchem der Meridian normaler Schnitt ist. Bei den Parallelkreisen umhüllen sie einen Umdrehungskegel und sind ebenfalls alle gegen den Schnitt gleich geneigt.

Die Hauptschnitte einer Fläche zweiten Grades sind sämmtliche Krümmungscurven. Denn die Tangentialebene ihnen entlang steht immer normal auf ihnen.

7. Die Theorie der geradlinigen Flächen.

§ 68.

Erklärung. Eine geradlinige Fläche ist eine solche, die durch Bewegung einer Geraden entstanden ist. Dahin gehören die allgemeinste Cylinder- und die allgemeinste Kegelfläche, und zwar gehören diese der einen der beiden grossen Gruppen dieser Art Flächen an; in der andern, welche wesentlich von dieser ersten unterschieden ist, befinden sich Flächen wie das geradlinige Hyperboloid und das geradlinige Paraboloid.

Aufgabe. Die allgemeinste Gleichung der geradlinigen Flächen aufzustellen.

Die Gleichungen der Geraden seien in der Form gegeben $\begin{cases} z = a.x + b \\ z = a_1.y + b_1 \end{cases}$, welche sie immer annehmen können. Dann werden diese Gleichungen die einer geradlinigen Fläche ergeben, wenn in ihnen die Constanten a, b, a_1, b_1 als Functionen irgend eines Parameters t gegeben sind, und man diesen Parameter aus ihnen eliminirt. Sind diese Constanten die allgemeinsten Functionen, so erhält man durch Elimination des Parameters die allgemeinste geradlinige Fläche.

Dieser Parameter, den wir eliminiren, kann eine der Grössen a, b, a_1, b_1 selbst sein. Denn wenn a eine Function von t ist, so ist auch t eine Function von a, und wir können somit die andern Constanten als Functionen von a ansehen. Somit können wir die allgemeinste Gleichung einer geradlinigen Fläche so schreiben
$$\begin{cases} z = a.x + F(a) \\ z = \varphi(a).y + f(a) \end{cases}$$

Wollen wir die Gleichung dieser Fläche so haben, dass x, y, z als Functionen zweier unabhängigen Variabeln sich darstellen, so gehen wir von folgender Gleichung der geraden Linie aus:

$$\frac{x-\xi}{a} = \frac{y-\eta}{b} = \frac{z-\zeta}{c}.$$

In dieser Gleichung mögen ξ, η, ζ, a, b, c Functionen einer Grösse u sein; durch die Elimination dieser Grösse würde man die geradlinige Fläche so wie vorhin erhalten. Wir können für die fernere Entwickelung immer annehmen, dass die Grössen a, b, c der Gleichung genügen: $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, d. h. dass sie die Cosinus der Neigungen sind, welche die gerade Linie mit den drei Axen bildet; wäre dies nicht der Fall, so könnte man sie durch Division der Gleichung mit einer passenden Zahl dazu machen. Setzen wir jetzt

die drei gleichen Brüche, welche die Gleichung der erzeugenden Geraden ausmachen, gleich v, so sind

$$\begin{cases} x = \xi + a.v \\ y = \eta + b.v \\ z = \zeta + c.v \end{cases}$$

die Gleichungen der allgemeinsten geradlinigen Fläche, wenn v eben variabel ist und $\xi, \eta, \zeta, a, b, c$ allgemeine Functionen einer andern Variabeln u sind. Durch Elimination von u und v würde man offenbar die Gleichung der Fläche in der vorigen Form erhalten.

Wir wollen nun noch die Bedeutung der Grössen u und v, welche hier auftreten, entwickeln. Die Gleichung $u = cst$, wodurch zugleich die Grössen $\xi, \eta, \zeta, a, b, c$ alle constante Werthe erhalten, bestimmt eine Gerade und zwar eine Gerade der Fläche.

Setzt man $v = 0$, so werden vermöge der Gleichungen der geradlinigen Fläche ξ, η, ζ die Coordinaten einer Curve auf der Oberfläche, indem alsdann x, y, z nur Functionen von u sind, welche zugleich der Gleichung der Fläche genügen. Durch jeden Punkt dieser Curve, wie überhaupt durch jeden Punkt der Fläche, geht eine Gerade der Fläche, die in ihrer sonstigen Lage durch die Natur der Grössen a, b, c bestimmt wird. Wir wollen die Curve $v = 0$ fortan die Fundamentalcurve der Fläche nennen.

Die Grösse v bedeutet die Entfernung eines Punktes (x, y, z) der Fläche von dem ihm entsprechenden Punkte (ξ, η, ζ) in der Fundamentalcurve. Daher bedeutet endlich die Gleichung $v = cst$, eine Curve auf der Fläche, deren jeder Punkt die constante Entfernung v von dem mit ihm auf derselben Geraden liegenden Punkt der Fundamentalcurve hat.

Wir können hiernach zu den Gleichungen der geradlinigen Fläche auch durch folgende Betrachtung kommen. Wir denken uns irgend eine Curve C gezogen, welche wir die Fundamentalcurve nennen, und deren Coordinaten wir durch ξ, η, ζ bezeichnen. Diese Coordinaten ξ, η, ζ mögen gegeben sein als Functionen einer Grösse u. Durch jeden Punkt der Curve C denken wir uns eine Gerade gezogen nach einem Gesetze, welches wir allerdings nicht specialisiren können, von welchem wir aber soviel wissen, dass es für jeden Punkt von C die Richtung bestimmt, welche die durch ihn gelegte Gerade einnimmt. Die Cosinus dieser Richtung seien a, b, c resp. gegen die Axe der x, y, z. Diese Grössen a, b, c ändern sich somit von Punkt zu Punkt der Curve C, sind also Functionen von u. Es ist hiernach die Gleichung einer solchen Geraden

$$\frac{x-\xi}{a} = \frac{y-\eta}{b} = \frac{z-\zeta}{c}.$$

Setzen wir diese drei gleichen Brüche gleich v, so bekommen wir als Gleichung der allgemeinsten geradlinigen Fläche das System

$$\begin{cases} x = \xi + av \\ y = \eta + bv \\ z = \zeta + cv \end{cases}$$

Hierin bedeutet, wie schon erwähnt, v die Entfernung irgend eines Punktes der Fläche von seinem zugehörigen Punkte in C, nach der einen oder der andern Seite hin genommen.

Ein Beispiel liefert folgende Fläche:

$$\begin{cases} x = \sqrt{p} \cdot \frac{u+v}{2} \\ y = \sqrt{q} \cdot \frac{u-v}{2} \\ z = \frac{u.v}{2} \end{cases}$$

Hier ist

$$\xi = \sqrt{p} \cdot \frac{u}{2} \quad \eta = \sqrt{q} \cdot \frac{u}{2} \quad \zeta = 0,$$

ferner

$$a = \frac{\sqrt{p}.}{2} \quad b = -\frac{\sqrt{q}}{2} \quad c = \frac{u}{2};$$

man denke sich also in der Ebene der xy eine gerade Linie,

$$\begin{cases} \xi = \sqrt{p} \cdot \frac{u}{2} \\ \eta = \sqrt{q} \cdot \frac{u}{2} \end{cases}$$

d. h. eine Gerade, welche mit der Axe der x einen Winkel bildet, dessen Tangente gleich $\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}}$ ist. Durch jeden Punkt dieser Geraden lege man eine Gerade, welche mit den drei Axen der x, y, z resp. Winkel bildet, deren Cosinus sind:

$$\frac{\sqrt{p}}{2r}, \; \frac{-\sqrt{q}}{2r}, \; \frac{u}{2r},$$

wenn r bedeutet:

$$\sqrt{\frac{p}{4} + \frac{q}{4} + \frac{u^2}{4}}.$$

Um die Geraden der Fläche zu finden, müssen wir blos u als constanten Parameter ansehen. Eliminiren wir daher aus den obigen Gleichungen v, so erhalten wir

$$v = \frac{2x}{\sqrt{p}} - u = u - \frac{2y}{\sqrt{q}} = \frac{2z}{u},$$

also

$$1) \quad u = \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} \qquad 2) \quad \frac{2z}{u} = \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}:$$

Beide Gleichungen drücken Ebenen aus, die Gleichung 1) parallele Ebenen. Also liegen alle Geraden der Fläche in parallelen Ebenen oder sind einer Ebene parallel. Man findet aber ebenso, wenn man u eliminirt:

$$3)\quad v = \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} \text{ und } 4)\quad \frac{2z}{v} = \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}:$$

das System der Curven $v = cst$, ist also ebenfalls eine Schaar Gerader, die wegen der Gleichung 3) einer Ebene parallel ist. Auf der vorliegenden Fläche liegen also zwei Schaaren von Geraden, von denen jede Schaar einer Ebene parallel ist. Daher ist die Fläche ein hyperbolisches Paraboloid; seine Gleichung in der gewöhnlichen Form: $2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q}$.

§ 69.

Für unsre nächsten Untersuchungen über die geradlinigen Flächen entwickeln wir die Gleichung der Tangentialebene in irgend einem Punkte der geradlinigen Fläche. Die allgemeine Gleichung der Tangentialebene ist $(X-x)A + (Y-y)B + (Z-z)C = 0$, worin X, Y, Z die laufenden Coordinaten, x, y, z die irgend eines Punktes der Fläche und A, B, C die in § 53. angegebenen Determinanten sind. Für die geradlinigen Flächen wird nun A oder

$$\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$= \left(\frac{d\eta}{du} + v\frac{db}{du}\right)c - b\left(\frac{d\zeta}{du} + v\frac{dc}{u}\right) = c\frac{d\eta}{du} - b\frac{d\zeta}{du} + v\left\{c\frac{db}{du} - b\frac{dc}{du}\right\}$$

oder wenn wir das Binom der beiden ersten Glieder mit l, den Factor von v mit l_1 bezeichnen, und m, m_1, n, n_1 die entsprechenden Grössen bei B und C sind: es ist

$$A = l + l_1 v,\quad B = m + m_1 v,\quad C = n + n_1 v.$$

Demnach wird unsre Gleichung folgende:

$$X(l + l_1 v) + Y(m + m_1 v) + Z(n + n_1 v) = x(l + l_1 v) + y(m + m_1 v) + z(n + n_1 v)$$
$$= (\xi + av)(l + l_1 v) + (\eta + bv)(m + m_1 v) + (\zeta + cv)(n + n_1 v)$$

oder wie man sich leicht überzeugt

$$= \xi(l + l_1 v) + \eta(m + m_1 v) + \zeta(n + n_1 v).$$

Wir können also, wenn wir für l, l_1 u. s. w. ihre Werthe zurücksetzen und die Differentiationen nach u durch Accente bezeichnen, die Gleichung der Tangentialebene so schreiben:

$$(X - \xi)\{c\eta' - b\zeta' + v(cb' - bc')\} + (Y - \eta)\{a\zeta' - c\xi' + v(ac' - ca')\}$$
$$+ (Z - \zeta)\{b\xi' - a\eta' + v(ba' - ab')\} = 0.$$

Wir beantworten hiernach folgende Frage:

Wie sind die Normalen entlang einer geraden Linie der Fläche beschaffen?

Die Gleichung der Normale, d. h. einer Geraden, die durch den Punkt (ξ, η, ζ) geht und auf der Tangentialebene normal steht, können wir mit Wiedereinführung der Grössen l, l_1 u. s. w. folgendermassen schreiben:

$$\frac{X - x}{l + l_1 . v} = \frac{Y - y}{m + m_1 . v} = \frac{Z - z}{n + x_1 . v} = w.$$

Nehmen wir nun zwei Punkte auf derselben Geraden der Fläche, so ist nur v für beide verschieden, u bleibt dasselbe. Um daher den Ort aller Normalen zu finden, welche entlang dieser Geraden gezogen werden können, muss man aus den Gleichungen der einen Normale v eliminiren. Wir schreiben sie zu dem Ende in folgender Gestalt:

$$X - x \text{ oder } X - \xi - av = lw + l_1 vw$$

oder

$$X - \xi = av + lw + l_1 v . w$$
$$Y - \eta = bv + mw + m_1 v . w$$
$$Z - \zeta = cv + nw + n_1 v . w,$$

und haben somit drei Gleichungen, aus denen wir v und w eliminiren müssen. Es ist nun, wenn man die Gleichungen nach v, w und $v . w$ auflöst:

$$\begin{vmatrix} a & l & l_1 \\ b & m & m_1 \\ c & n & n_1 \end{vmatrix} v = \begin{vmatrix} X-\xi & l & l_1 \\ Y-\eta & m & m_1 \\ Z-\zeta & n & n_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & l & l_1 \\ b & m & m_1 \\ c & n & n_1 \end{vmatrix} w = - \begin{vmatrix} X-\xi & a & l_1 \\ Y-\eta & b & m_1 \\ Z-\zeta & c & n_1 \end{vmatrix}$$

$$\text{und } \begin{vmatrix} a & l & l_1 \\ b & m & m_1 \\ c & n & n_1 \end{vmatrix} v . w = \begin{vmatrix} X-\xi & a & l \\ Y-\eta & b & m \\ Z-\zeta & c & n \end{vmatrix},$$

folglich, wenn man die ersten beiden Gleichungen mit einander, und die letzte mit dem Coefficienten, welchen $v . w$ in ihr hat, multiplicirt, und alsdann die rechten Seiten wegen der Identität der linken einander gleich setzt:

$$\begin{vmatrix} X-\xi & l & l_1 \\ Y-\eta & m & m_1 \\ Z-\zeta & n & n_1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} X-\xi & a & l_1 \\ Y-\eta & b & m_1 \\ Z-\zeta & c & n_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X-\xi & a & l \\ Y-\eta & b & m \\ Z-\zeta & c & n \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a & l & l_1 \\ b & m & m_1 \\ c & n & n_1 \end{vmatrix} = 0$$

Dies ist eine Gleichung zweiten Grades. Wir haben somit folgenden Satz gefunden: Wenn man in einer geradlinigen Fläche entlang einer geraden Linie der Fläche ihre Normalen zieht, so bilden sie eine Fläche zweiten Grades, welche, weil alle Normalen einer Ebene parallel sind, ein hyperbolisches Paraboloid ist.

§ 70.

In welchem Falle bilden die Normalen entlang einer Geraden der Fläche eine einzige Ebene? Oder mit andern Worten: wie muss eine geradlinige Fläche beschaffen sein, damit die Tangentialebene in allen Punkten einer ihrer geraden Linien dieselbe bleibt?

Denkt man sich in einem Punkte einer Curve doppelter Krümmung die Tangente, im nächsten Punkte ebenfalls und so fort, so erhält man unzählig viele Tangenten, welche eine geradlinige Fläche bilden werden. Diese geradlinige Fläche ist die allgemeinste geradlinige Fläche, bei welcher die Normalen entlang einer Geraden eine einzige Ebene bilden. Den Kegel, welcher zu diesen Flächen gehört, erhält man z. B. wenn die Curve zum Punkte degenerirt, den Cylinder, indem der Punkt noch dazu ins Unendliche fortrückt.

Analytisch beantwortet sich die Frage folgendermassen. Alle Punkte einer Geraden haben die Gleichung $u = \text{cst}$, also die Grössen $\xi, \eta, \zeta, a, b, c$ gemeinschaftlich, unterscheiden sich also nur durch den Werth des v. Sollen daher alle Punkte einer Geraden dieselbe Tangentialebene haben, so muss aus der Gleichung der Tangentialebene v herausgehen.

Dies ist erstens dadurch möglich, dass die Coefficienten des v in der Gleichung verschwinden: $cb' - bc' = 0 \quad ca' - ac' = 0$ $ab' - ba' = 0$ oder $\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \frac{a'}{a}$, wie man die Gleichungen schreiben kann, wenn a, b, c von Null verschieden sind. Sie sind irgendwelche bestimmte Functionen von u. Setzen wir daher die drei gleichen Brüche gleich U, so erhält man durch Integration der dadurch entstehenden drei Gleichungen: $la = \int U du + lC$ oder

$$a = C . e^{\int U du}, \text{ ebenso } b = C_1 . e^{\int U du}, \; c = C_2 . e^{\int U du}.$$

Da aber $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ist, so ist

$$(C^2 + C_1^2 + C_2^2) e^{2\int U du} = 1 \text{ oder } e^{\int U du} = \frac{1}{\sqrt{C^2 + C_1^2 + C_2^2}}$$

also constant; somit haben in diesem Falle $a \; b \; c$ constante Werthe, d. h. alle erzeugenden Geraden der Fläche bilden mit den Axen denselben Winkel, oder sind einander parallel. Die geradlinige Fläche ist also eine Cylinderfläche, denn diese entsteht, wenn man durch eine Curve eine Reihe paralleler Geraden zieht.

Ist dagegen einer der Cosinus, z. B. $b = 0$, so werden zwei der obigen drei Coefficienten von selbst Null, der dritte, hier $ca' - ac' = 0$ gesetzt giebt wie oben integrirt

$$a = C.e^{\int U du} \quad b = 0 \quad c = C_2.e^{\int U du}:$$

die Betrachtung ist also dieselbe wie vorhin, nur dass die Constante $C_1 = 0$ ist; es ergiebt sich also wiederum die Cylinderfläche.

Sind zwei der Cosinus z. B. $b = 0$ und $a = 0$, so wird $c = 1$; es sind also dann alle Geraden parallel der z Axe und erzeugen somit wiederum eine Cylinderfläche.

Wenn also die Coefficienten, welche v in der Gleichung der Tangentialebene hat, einzeln Null sind, so ergiebt sich auf jeden Fall eine Cylinderfläche.

Sind zweitens ξ, η, ζ constant, also ihre Differentiale Null, so fällt v ebenfalls hinweg und zwar indem man damit die Gleichung der Fläche durchdividirt. In diesem Falle schrumpft die Fundamentalcurve zu dem Punkte zusammen, welcher durch die Werthe von ξ, η, ζ bestimmt wird. Die entstehende Fläche ist eine Kegelfläche, welche wie bekannt die in Frage stehende Eigenschaft mit der Cylinderfläche theilt.

Schliessen wir diese Flächen aus, so ist es, wenn wir jetzt die Gleichung der Tangentialebene so schreiben:

$$(X-\xi)(cb'-bc')\left\{v + \frac{c\eta'-b\zeta'}{cb'-bc'}\right\} + (Y-\eta)(ac'-ca')\left\{v + \frac{a\zeta'-c\xi'}{ac'-ca'}\right\}$$
$$+ (Z-\zeta)(ba'-ab')\left\{v + \frac{b\xi'-a\eta'}{ba'-ab'}\right\} = 0.$$

drittens nur möglich, dass die Grösse v hinwegfällt, wenn die drei Klammergrössen einander gleich sind oder wenn

$$\frac{c\eta'-b\zeta'}{cb'-bc'} = \frac{a\zeta'-c\xi'}{ac'-ca'} = \frac{b\xi'-a\eta'}{ba'-ab'}$$

ist, weil man alsdann mit den Klammergrössen die Gleichung durchdividiren kann. Sind nun, wie wir voraussetzen, die Nenner dieser Brüche von Null verschieden, so kann man jedesmal zwei Grössen e und f finden, so dass $\xi' = ea + fa'$ $\eta' = eb + fb'$, denn um diese Gleichungen aufzulösen, ist nur die Bedingung erforderlich, dass $ab' - ba'$ von Null verschieden sei. e und f werden Functionen von u sein. Durch diese Substitution wird der dritte Bruch $= f$; man hat also die Gleichung

$$\frac{c\eta'-b\zeta'}{cb'-bc'} = f \text{ oder } b\zeta' = -f(cb'-bc') + c\eta' = bec + f(cb'-cb'+bc')$$

also $\zeta' = ec + fc'$. Es lassen sich also stets zwei Grössen e und f finden, so dass ξ' η' ζ' ausgedrückt werden durch die Gleichungen:

$$\xi' = ea + fa' \quad \eta' = eb + fb' \quad \zeta' = ec + fc':$$

und dies ist die Bedingung, damit die Tangentialebene für alle Punkte einer erzeugenden Linie der Fläche unverändert bleibt.

Diese Bedingung hat aber noch keinen geometrischen Sinn. Um sie zu interpretiren, setzen wir für den Augenblick

$$\xi - f.a = \alpha \quad \eta - f.b = \beta \quad \zeta - f.c = \gamma.$$

Dann sind α, β, γ die Coordinaten eines Punktes, der offenbar der Gleichung genügt: $\frac{x-\xi}{a} = \frac{y-\eta}{b} = \frac{z-\zeta}{c}$. Denn setzt man für x α u. s. w., so wird die Gleichung befriedigt. Alle Punkte α, β, γ liegen somit auf der geradlinigen Fläche. Bestimmen wir die Tangente der Curve, von der α, β, γ die einzelnen Punkte sind, so hat sie die Gleichung

$$\frac{X-\alpha}{\frac{d\alpha}{du}} = \frac{Y-\beta}{\frac{d\beta}{du}} = \frac{Z-\zeta}{\frac{d\gamma}{du}}.$$

Es ist aber

$$\frac{d\alpha}{du} = \xi' - fa' - f'a = ea - f'a = (e - f')a, \; \frac{d\beta}{du} = (e - f')b,$$
$$\frac{d\gamma}{du} = (e - f')c,$$

also wenn man diese Werthe und die für α, β, γ selber in die Gleichung der Tangente substituirt und zugleich mit $e - f'$ die Gleichung multiplicirt:

$$\frac{X - \xi + fa}{a} \text{ oder } \frac{X-\xi}{a} + f = \frac{Y-\eta}{b} + f = \frac{Z-\zeta}{c} + f$$

oder, indem man f subtrahirt:

$$\frac{X-\xi}{a} = \frac{Y-\eta}{b} = \frac{Z-\zeta}{c}.$$

Dies ist aber die Gleichung einer generatrix. Wir haben also den Satz gefunden, dass in diesem Falle sämmtliche geraden Linien der Fläche Tangenten an eine Curve sind, die auf ihr liegt. Cylinder und Kegel sind specielle Arten dieser Flächen, welche abwickelbare Flächen genannt werden. Man nennt die Curve, zu welcher sämmtliche Geraden der Fläche Tangenten sind, die Wendungskante (arête de rebroussement) der abwickelbaren Fläche.

Um dies übersehen zu können, denke man sich, siehe Fig. 20, statt der Curve und ihrer Tangenten ein Polygon im Raume und seine verlängerte Seiten: ab, bc, cd seien drei aufeinander folgende Seiten des Polygons, welche uns drei aufeinander folgende Elemente der Curve bedeuten. Dann kann man sich das unendlich grosse Element $a'bb'$ so um bb' drehen, dass es in dieselbe Ebene mit $b'cc'$ fällt; diese Ebene kann man wieder um cc' so lange drehen, bis sie mit dem folgenden Element $c'dd'$ in eine Ebene fällt. So kann man nach und nach sämmtliche Elemente in eine Ebene bringen. Man sieht zugleich, dass die Tangentialebene immer von zwei auf einander-

folgenden Polygonseiten gebildet wird, und dass $a'bb'$ nicht blos für b Tangentialebene ist, sondern für sämmtliche Punkte von ab. Denn um z. B. im Punkte o die Tangentialebene zu construiren, hat man nur nöthig zwei Tangenten an die Fläche zu ziehen: die eine von diesen ist oa selbst; die andre findet man, indem man o mit o' verbindet, denn o' und o sind unendlich nahe Punkte der abwickelbaren Fläche: $a'bb'$ ist aber die Ebene, welche oa und oo' enthält.

§ 71.

Man denke sich ein System aufeinander folgender gerader Linien; die Gleichung einer solchen Linie sei $\frac{x-\xi}{a}=\frac{y-\eta}{b}=\frac{z-\zeta}{c}$, wobei $\xi\,\eta\,\zeta\,a\,b\,c$ Functionen einer Grösse u sein mögen. Für eine zweite Linie desselben Systems habe u den Werth $u+\varDelta u$, wodurch a in $a+\varDelta a$, b in $b+\varDelta b$ u. s. w. übergeht, so dass also die Gleichung dieser zweiten Linie

$$\frac{x-\xi-\varDelta\xi}{a+\varDelta a}=\frac{y-\eta-\varDelta\eta}{b+\varDelta b}=\frac{z-\zeta-\varDelta\zeta}{c+\varDelta c}.$$

Wir wollen die kürzeste Entfernung dieser beiden Linien berechnen. Dazu müssen wir zunächst die Gleichungen der beiden Ebenen aufstellen, welche durch diese Linien einander parallel gelegt werden können. Eine Ebene, welche durch die erste Linie geht, hat die Gleichung

$$\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)+\gamma(z-\zeta)=0$$

oder vermöge der Gleichung der Geraden, welche doch in ihr liegen soll: $\alpha a+\beta b+\gamma c=0$. Eine Ebene, welche dieser parallel durch die zweite Linie geht, lässt sich ähnlich so schreiben:

$$\alpha(a+\varDelta a)+\beta(b+\varDelta b)+\gamma(c+\varDelta c)=0$$

und in Folge dessen auch so: $\alpha.\varDelta a+\beta.\varDelta b+\gamma.\varDelta c=0$. Wir können somit, überall wo nur die Verhältnisse von α, β, γ auftreten, folgende Werthe setzen:

$$\alpha=b.\varDelta c-c.\varDelta b \quad \beta=c.\varDelta a-a.\varDelta c \quad \gamma=a.\varDelta b-b.\varDelta a.$$

Diese Werthe denken wir uns eingesetzt in die Gleichungen der beiden Ebenen:

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta$$

und

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=\alpha(\xi+\varDelta\xi)+\beta(\eta+\varDelta\eta)+\gamma(\zeta+\varDelta\zeta).$$

Dann wird die Entfernung beider

$$p=\frac{\alpha.\varDelta\xi+\beta.\varDelta\eta+\gamma.\varDelta\zeta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}};$$

und dies ist zugleich die kürzeste Entfernung der beiden Linien. Wir haben demnach dafür folgenden Ausdruck:

$$p = \frac{(b.\Delta c - c.\Delta b)\Delta\xi + (c.\Delta a - a.\Delta c)\Delta\eta + (a.\Delta b - b.\Delta a)\Delta\zeta}{\sqrt{(b.\Delta c - c.\Delta b)^2 + (c.\Delta a - a.\Delta c)^2 + (a.\Delta b - b.\Delta a)^2}}. —$$

Denken wir uns nun, dass Δu immer kleiner wird, so wird offenbar p zugleich kleiner, und zwar bleibt p im Allgemeinen von derselben Ordnung wie Δu. Man kann nun die Frage aufwerfen: In welchem Falle ist die kürzeste Entfernung der beiden aufeinanderfolgenden geraden Linien nicht ein unendlich Kleines der ersten Ordnung, sondern einer höheren Ordnung? Wir setzen zu dem Ende $\Delta u = h$ und denken uns die Zuwächse von a, b u. s. w. nach dem Taylor'schen Lehrsatz entwickelt. Dann wird

$$b.\Delta c - c\Delta b = h(bc' - cb') + \frac{h^2}{2}(bc'' - cb'') + \cdots,$$

also der Nenner des Ausdrucks für p:

$$h.\sqrt{(bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2 + h\{\cdots\cdots\}} + \cdots.$$

Der Nenner bleibt somit stets positiv und von Null verschieden; wir können ihn also bezeichnen durch $h.N$, wo N eine endliche Grösse ist. Der Zähler von p wird von der zweiten Ordnung:

$$h^2\{\xi'(bc' - cb') + \eta'(ca' - ac') + \zeta'(ab' - ba')\}$$
$$+ \frac{h^3}{2}\{\xi''(bc' - cb') + \xi'(bc'' - cb'') + \cdots\cdots\} + \cdots\cdots$$

Also wird

$$p = \frac{h}{N}\{\xi'(bc' - cb') + \cdots\}$$
$$+ \frac{h^2}{2N}\{\xi''(bc' - cb') + \xi'(bc'' - cb'') + \cdots\cdots\} + \cdots\cdots$$

Dieser Ausdruck kann nur dadurch ein unendlich Kleines einer höhern als der ersten Ordnung werden, dass der Coefficient von $\frac{h}{N}$ Null wird. Es muss also, damit dies geschehe,

$$\xi'(bc' - cb') + \eta'(ca' - ac') + \zeta'(ab' - ba') = 0$$

sein, wodurch zugleich die Glieder zweiter Ordnung verschwinden, da der Coefficient von $\frac{h^2}{2N}$ der genaue Differentialquotient des Coefficienten von $\frac{h}{N}$ ist. Diese Bedingungsgleichung ist aber identisch mit der, welche die Bedingung angiebt, damit die Tangentialebene entlang einer geraden Linie der Fläche sich nicht ändert. Wir haben somit den Lehrsatz gewonnen:

Die Bedingung, damit zwei Gerade eines Systems, welche einander unmittelbar folgen, eine Entfernung nicht der ersten, sondern

der zweiten oder vielmehr dritten Ordnung haben, stimmt ganz überein mit der Bedingung, dass die Tangentialebene der Fläche, welche von allen Geraden gebildet wird, entlang einer Geraden der Fläche ungeändert bleibt. Vernachlässigt man also unendlich kleine Grössen höherer Ordnungen, so kann man sagen: Zwei Erzeugende einer abwickelbaren Fläche haben einen Punkt gemein. Dies lässt sich auch so beweisen:

Man habe die Gleichung einer Geraden: $\frac{x-\xi}{a} = \frac{y-\eta}{b} = \frac{z-\zeta}{c}$ und die der unendlich nahen mit Vernachlässigung der unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung:

$$\frac{x-\xi-d\xi}{a+da} = \frac{y-\eta-d\eta}{b+db} = \frac{z-\zeta-d\zeta}{c+dc},$$

wo $d\xi = \frac{d\xi}{du}.du$ u. s. w. ist. Die drei ersten gleichen Brüche wollen wir $= \varepsilon$, die andern drei $= \varkappa$ setzen. Die beiden Geraden haben nun einen Punkt gemein, wenn die Grössen x, y, z resp. in beiden Gleichungen einzeln gleich sind, d. h. wenn man aus den Gleichungen $x-\xi = a\varepsilon \quad x-\xi-d\xi = \varkappa a + \varkappa da$ x eliminiren darf, und ebenso die beiden andern. Man erhält dadurch $d\xi + \varkappa a + \varkappa da = \varepsilon a$ oder wenn man $\varkappa - \varepsilon = \lambda$ setzt:

$$d\xi + \lambda a + \varkappa da = 0$$

und ebenso

$$d\eta + \lambda b + \varkappa db = 0, \; d\zeta + \lambda c + \varkappa dc = 0.$$

Eliminirt man also λ und $\varkappa$ und dividirt noch die entstehende Gleichung mit $du.du$, so findet man als die gesuchte Bedingung wie oben

$$\xi'(bc'-cb') + \eta'(ca'-ac') + \zeta'(ab'-ba') = 0.$$

§ 72.

Man kann die abwickelbaren Flächen noch auf eine andere Weise sich entstanden denken, als dadurch, dass eine Gerade sich tangirend an der Wendungskante fortbewegt. So kann der Kegel ausser der gewöhnlichen Entstehungsart, dass eine Gerade durch einen Punkt und eine Curve geht, auch noch entstehend gedacht werden, indem man sich eine Ebene vorstellt, welche durch den Punkt geht und jene Curve berührt. Aehnlich ist es mit der allgemeinen abwickelbaren Fläche.

$a\,b\,c\,d\,e$ sei ein Polygon, siehe Fig. 20, welches, wenn die Winkelpunkte einander unendlich nahe rücken, zur Curve wird. Dann ist offenbar $a'bb'$ eine Tangentialebene, desgleichen $b'cc'$, $c'dd$ u. s. w.; in Bezug auf die Curve sind sie Schmiegungsebenen. Zwei

auf einander folgende Tangentialebenen schneiden sich immer in einer Tangente. Man kann also sagen: die abwickelbaren Flächen können angesehen werden als diejenigen Flächen, die von einer Ebene umhüllt werden, welche nach einem bestimmten Gesetze sich fortbewegt. Die Gleichung dieser Ebene sei $z = l.x + m.y + n$, wo lmn Functionen eines Parameters h sind, welchem wir nach und nach alle möglichen Werthe beilegen, um die Fläche zu finden, die von diesen so bestimmten Ebenen herrühren wird. Schreiben wir die Gleichung der Ebene so: $z - l.x - m.y - n = U = 0$, dann ist die Gleichung der nächstfolgenden Ebene, in welcher h den Werth $h + \varepsilon$ hat: $U + \varepsilon.U' + \frac{\varepsilon^2}{2} U'' + \cdots = 0$. Aus diesen beiden Gleichungen oder aus irgend einer Combination von ihnen, z. B.

$$U = 0, \quad \varepsilon.U' + \frac{\varepsilon^2}{2} U'' + \cdots = 0$$

oder, wenn man die zweite durch ε dividirt und nachher $\varepsilon = 0$ setzt: aus den beiden Gleichungen $U = 0$ und $U' = 0$ ist der Durchschnitt zweier unendlich nahen Ebenen zu bestimmen. Schreiben wir die Gleichungen wieder so:

$$\begin{cases} 0 = z - lx - my - n \\ 0 = \frac{dl}{dh} x + \frac{dm}{dh} y + \frac{dn}{dh}, \end{cases}$$

so geben sie die Gerade an, welche der Durchschnitt der beiden Ebenen ist, und in ihren verschiedenen Lagen von den verschiedenen Werthen des h abhängt. Eliminirt man also die Grösse h aus beiden Gleichungen, so erhält man die allgemeinste Gleichung einer abwickelbaren Fläche. Man kann diese Gleichung nur deshalb nicht aufstellen, weil man nicht weiss, welche Functionen l, m und n von h sind. Denkt man sich h aus der zweiten Gleichung ausgedrückt als Function von x und y und diesen Werth $h = \varphi(x, y)$ in die erste Gleichung eingesetzt, so bekommt man eine Gleichung von der Form $z = F(x, y)$.

Sehr leicht kann man die partielle Differentialgleichung der abwickelbaren Flächen aufstellen. Differentiirt man nämlich die Gleichung $U = 0$ nach x, so erhält man

$$\frac{\partial z}{\partial x} = l + \left(\frac{dl}{dh} x + \frac{dm}{dh} y + \frac{dn}{dh}\right) \frac{\partial h}{\partial x},$$

d. i. weil $U' = 0$ ist, $\frac{\partial z}{\partial x} = l$, ebenso $\frac{\partial z}{\partial y} = m$. Die Grössen l und m sind beides Functionen von h. Eliminirt man h aus den beiden Gleichungen $p = l$, $q = m$, so bekommt man eine Gleichung zwischen x, y, p, q. In jeder abwickelbaren Fläche lässt sich also p als Function von q betrachten: $p = f(q)$. Differentiiren wir diese

Gleichung einmal nach x und einmal nach y, so erhalten wir $r = f'(q).s \quad s = f'(q).t$, also durch Elimination von $f'(q)$ die bekannte Gleichung der abwickelbaren Flächen $rt - s^2 = 0$.

Zusatz. Diese Betrachtungen lehren, dass es im Allgemeinen möglich ist, wenn auf irgend einer Fläche eine Curve gezogen ist, eine abwickelbare Fläche zu beschreiben, welche durch dieselbe Curve geht und die gegebene Fläche in allen Punkten berührt; oder: es ist immer möglich, eine abwickelbare Fläche zu beschreiben, welche eine gegebene Fläche in einer gegebenen Curve umhüllt. Wenn man z. B. auf einer Fläche zweiten Grades eine ebene Curve nimmt, so sind diese abwickelbaren Flächen Kegel- oder Cylinderflächen.

Die Fläche sei F, die Curve ABC. Denken wir uns eine Tangentialebene der Fläche, die sich beständig tangirend längs dieser Curve bewegt, so wird sie eine abwickelbare Fläche beschreiben, für welche sie selbst Tangentialebene ist. Man erhält also auf diese Weise eine abwickelbare Fläche, welche durch die Curve hindurchgeht und fortwährend dieselbe Tangente hat wie die Fläche selbst. Die Kante der abwickelbaren Fläche erhält man, indem man für zwei unendlich nahe Tangentialebenen der Fläche den Durchschnitt bestimmt.

§ 73.

Giebt es Curven auf einer Fläche, die die Eigenschaft haben, dass, wenn man durch dieselben eine umhüllende abwickelbare Fläche legt, die Kanten dieser abwickelbaren Fläche zu den Tangenten der Curve normal stehen?

Es sei $F(x, y, z) = 0$ die Gleichung der Fläche, (x, y, z) ein Punkt derselben, und durch ihn eine Curve auf der Fläche gezogen. Wir nehmen zu dem ersten Punkt auf derselben Curve einen unendlich nahen Punkt $(x + dx, y + dy, z + dz)$. Dann ist die Tangentialebene im ersten Punkt, wenn wir die Bezeichnungen des § 40. anwenden:

$$(1) \ldots . (\xi - x) P + (\eta - y) Q + (\zeta - z) R = 0.$$

Die in dem unendlich nahen Punkt wird

$$(\xi - x - dx)(P + dP) + (\eta - y - dy)(Q + dQ) + (\zeta - z - dz)(R + dR) = 0$$

oder

$$(\xi - x) P + (\eta - y) Q + (\zeta - z) Q - (Pdx + Qdy + Rdz)$$
$$+ (\xi - x) dP + (\eta - y) dQ + (\zeta - z) dR - (dPdx + dQdy + dRdz) = 0,$$

oder wenn man die Gleichung (1) und die Gleichung $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ subtrahirt, und die Grössen zweiter Ordnung vernachlässigt,

$$(2) \ldots . (\xi - x) dP + (\eta - y) dQ + (\zeta - z) dR = 0.$$

Wir konnten aber die Gleichung (1) subtrahiren, weil wir die Durchschnittslinie beider Tangentialebenen bestimmen wollen. Diese wird vermöge der Gleichungen (1) und (2)

$$\frac{\xi - x}{QdR - RdQ} = \frac{\eta - y}{RdP - PdR} = \frac{\zeta - z}{PdQ - QdP}.$$

Dies ist eine Kante der abwickelbaren Fläche. Diese Kante steht aber normal zu der Tangente der Curve, deren Gleichung

$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - z}{dz}$$

ist, wenn

$$dx\,(Q\,d\,R - R\,d\,Q) + dy\,(R\,d\,P - P\,d\,R) + dz\,(P\,d\,Q - Q\,d\,P) = 0.$$

Dies ist eine Differentialgleichung ersten Grades zweiter Ordnung und keine andere als die Differentialgleichung der Krümmungscurven (§ 66.) in veränderter Ordnung der Glieder. Wir haben somit folgenden höchst merkwürdigen Satz:

Die Krümmungscurven einer Fläche haben die Eigenschaft, dass, wenn man eine abwickelbare Fläche entlang einer solchen Krümmungscurve legt, welche die gegebene Fläche umhüllt, die Kanten der abwickelbaren Fläche normal zu den Tangenten der Krümmungscurve stehen. Und zwar ist dies eine Eigenschaft, die den Krümmungscurven ausschliesslich zukommt.

Bei den Rotationsflächen sind die Krümmungscurven Meridian und Parallelkreis. Die abwickelbare Fläche um den Meridian wird ein Cylinder, die um den Parallelkreis ein Kegel. Jede Kante dieser beiden Flächen steht normal zu der entsprechenden Tangente der Krümmungscurven.

§ 74.

Eine dritte Eigenschaft der Krümmungscurven, welche freilich mit der vorigen eng zusammenhängt, findet man, wenn man auf einer gegebenen Fläche sich eine Curve und entlang derselben die Normalen der Fläche gezogen denkt, wodurch man eine allgemeine geradlinige Fläche erhält. Untersucht man nun diejenigen Curven auf der gegebenen Fläche, welche die Eigenschaft haben, dass die Normalen entlang dieser Curven eine abwickelbare Oberfläche bilden oder in zwei unendlich nahen Punkten der Curve die Normalen der Fläche sich treffen, so findet man wiederum die Krümmungscurven. Denn die Gleichungen der Normale sind $\frac{\xi - x}{P} = \frac{\eta - y}{Q} = \frac{\zeta - z}{R}$, welche drei gleichen Brüche wir gleich λ setzen wollen. Alsdann sind die Gleichungen der unendlich nahen Normale $\frac{\xi - x - dx}{P + dP} = \frac{\eta - y - dy}{Q + dQ} = \frac{\zeta - z - dz}{R + dR} = \lambda + \mu$. Es ist

also die Frage: wann haben diese beiden Geraden einen Punkt gemein? Schreiben wir die Gleichungen der Normalen so:

$$\begin{cases} \xi - x = \lambda P \\ \eta - y = \lambda Q \\ \zeta - z = \lambda R \end{cases} \quad \begin{cases} \xi - x = dx + (\lambda + \mu)(P + dP) \\ \eta - y = dy + (\lambda + \mu)(Q + dQ), \\ \zeta - z = dz + (\lambda + \mu)(R + dR) \end{cases}$$

so haben wir hieraus ausser λ und μ auch ξ, η, ζ zu eliminiren. Bezeichnen wir $\lambda + \mu$ durch ν, so erhalten wir dadurch folgendes System von drei Gleichungen:

$$\begin{cases} 0 = dx + \mu P + \nu . dP \\ 0 = dy + \mu Q + \nu . dQ \\ 0 = dz + \mu R + \nu . dR \end{cases}$$

und dies sind mit andrer Bezeichnung der constanten Factoren dieselben Gleichungen, welche wir oben (§ 66.) für die Krümmungscurven gefunden haben. Sie gehen über in die Endform nur einer Gleichung, wenn man μ und ν noch eliminirt.

Dass diese jetzt erwiesene Eigenschaft der Krümmungscurven eigentlich keine andere ist als die vorige, sieht man durch eine ganz elementare Betrachtung:

Wenn man in zwei Punkten E und F zweier Ebenen, deren Durchschnitt S heissen möge, die Normalen auf ihnen errichtet, so werden sich diese schneiden, wenn die Linie $\overline{EF}$ und der Durchschnitt S rechte Winkel im Raume mit einander bilden. Denkt man sich also unter den beiden Ebenen zwei aufeinanderfolgende Tangentialebenen der Fläche, welche in E und F die Fläche berühren, so wird der Durchschnitt S eine Kante der abwickelbaren Oberfläche sein. $\overline{EF}$ ist alsdann eine Tangente der fraglichen Curve auf der Oberfläche. Steht nun $S \perp \overline{EF}$, so schneiden sich die Normalen in E und F. Diese Eigenschaft also, dass die Kanten der abwickelbaren Umhüllungsfläche auf den Tangenten der Curve normal stehen, und die andere, dass die Normalen entlang der Curve eine abwickelbare Oberfläche geben, sind im Grunde dieselbe Eigenschaft, und charakterisiren die Krümmungscurven. Ausser diesen beiden Definitionen der Krümmungscurven hatten wir noch folgende, welche allerdings nicht blos eine andre Form dieser beiden ist: die Krümmungscurven sind diejenigen Curven, deren Tangenten die Richtungen der Hauptschnitte bestimmen.

Bei den Rotationsflächen liegen die Normalen entlang dem Meridian alle im Meridian, bilden also eine Ebene, und dies ist eine abwickelbare Fläche. Die Normalen in den Parallelkreisen bilden auch eine, nämlich einen Kegel.

Monge ist der erste gewesen, der diese Theorie der Krümmungscurven aufgestellt hat, und zwar ging er aus von der dritten Er-

klärung, dass sie diejenigen Curven sind, längs deren zwei auf einanderfolgende Flächennormalen sich treffen.

Anmerkung. Charles Dupin, ein Schüler Monge's, hat folgende Sätze gefunden: Denkt man sich auf einer Oberfläche eine Curve gezogen, und in einem Punkte O derselben die Tangente, siehe Fig. 21, so wie auch die abwickelbare Oberfläche, welche die gegebene Fläche längs der Curve umhüllt: dann findet über diejenige Kante der abwickelbaren Oberfläche, welche durch O geht, der Satz statt, dass ihre Lage ganz unabhängig ist von dem übrigen Laufe der auf der Fläche festgesetzten Curve, und nur vom Punkte O und der dort an die Curve gezogenen Tangente abhängt. Ein zweiter Satz hierüber ist, dass zwischen der Tangente (1) und der Kante (2), die doch beide Tangenten an die Oberfläche sind, eine vollkommene Reciprocität stattfindet; d. h. legt man jetzt durch O eine Curve, deren Tangente (2) ist, so wird (1) die entsprechende Kante der durch diese Curve gelegten abwickelbaren Umhüllungsfläche. Dupin nennt daher die beiden Tangenten (1) und (2) conjugirte Tangenten. Diese Reciprocität lässt sich nämlich auch so darstellen: Zeichnet man auf der Tangentialebene der Fläche, siehe Fig. 15, um den Berührungspunkt als Mittelpunkt die (§ 46., Anm. 1 angeführte) Ellipse, deren Hauptaxen in der Richtung der Haupttangenten der Fläche liegen und an Grösse gleich den Wurzeln aus den Krümmungsradien der Hauptschnitte sind, so sind je zwei conjugirte Tangenten conjugirte Durchmesser dieser Ellipse.

§ 75.

Mit Hilfe dieser Betrachtungen nun lassen sich eine grosse Anzahl Sätze ganz einfach geometrisch beweisen; z. B. der Satz: Wenn eine Krümmungscurve eben ist, so bildet ihre Ebene mit den Tangenten der Fläche einen constanten Winkel.

Wir schalten zunächst folgenden Satz ein: Wenn man von einem Punkt nach einer Linie zwei andere einander unendlich nahe Linien zieht, so ist ihre Differenz proportional ihrem Winkel, d. h. von gleicher Ordnung mit ihm. Ist aber die eine der beiden Linien normal auf der gegebenen, siehe Fig. 22, so ist ihre Differenz ein unendlich Kleines zweiter Ordnung. Denn ist die gegebene Linie l, der gegebene Punkt O, und zieht man von diesem zwei Linien r_1 und r_2 nach l, von denen die erste mit l den (stumpfen) Winkel w und mit einer als Axe angenommenen festen Geraden OM den Winkel v, die zweite also mit derselben den Winkel $v + dv$ bildet, so ist im Allgemeinen $r_2 = r_1 \frac{\sin w}{\sin (w + dv)}$ also

$$r_2 - r_1 = r_1 \frac{\sin w - \sin(w + dv)}{\sin(w + dv)} = -2 r_1 \frac{\sin \frac{dv}{2} \cos\left(w + \frac{dv}{2}\right)}{\sin(w + dv)},$$

negativ, weil w stumpf ist. Ist dagegen $r \perp l$, also $\sphericalangle w = 90^0$, so wird

$$r_1 - r = 2r \frac{\sin^2 \frac{dv}{2}}{\cos dv} = r \frac{1 - \cos dv}{\cos dv} = r \frac{\frac{dv^2}{2} - \frac{dv^4}{24} \cdots}{1 - \frac{dv^2}{2} \cdots}$$

Der Ausdruck für $r_2 - r_1$ ist offenbar von derselben Ordnung wie dv; der für $r_1 - r$ aber von der Ordnung dv^2.

Dies vorausgeschickt, denken wir uns eine Curve, siehe Fig. 23a, welche Krümmungscurve einer Fläche sei. Denken wir uns ferner die abwickelbare Umhüllungsfläche längs dieser Curve, so werden ihre Kanten normal sein zu den Tangenten der Curve; es sind also die mit R bezeichneten Winkel rechte. Denken wir uns statt der ebenen Curve ein Polygon, so enthält jede Tangentialebene eine Kante der abwickelbaren Fläche und eine Polygonseite. Es ist nun nachzuweisen, dass der Winkel zwischen diesen Tangentialebenen und der Ebene des Polygons constant bleibt. Es seien ab, bc zwei Seiten des ebenen Polygons, siehe Fig. 23b, M ein Punkt in einer Kante der abwickelbaren Fläche, also im Durchschnitt zweier Tangentialebenen; dann soll $\sphericalangle (a b M, a b c) = \sphericalangle (c b M, a b c)$ sein. Fällen wir daher von M $MO \perp$ auf die Ebene abc, und von dem Fusspunkt O $O\beta \perp$ auf die Linie ab, so ist die Neigung der beiden Ebenen abM und abc gemessen durch den Winkel $M\beta O$, und zwar hat man $\operatorname{tg} M\beta O = \operatorname{tg} (a b M, abc) = \frac{MO}{O\beta}$. Ebenso findet man $\operatorname{tg} (cbM, abc) = \frac{MO}{Ob}$ im rechtwinkligen Dreieck MbO. Da nun $O\beta$ von Ob sich nur um unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung unterscheidet, indem $\sphericalangle O\beta b = R$ ist, so ist $\sphericalangle (abM, abc) = (cbM, abc)$.

§ 76.

Nachdem wir jetzt das Wichtigste aus der Theorie der geradlinigen und namentlich der abwickelbaren Flächen kennen gelernt haben, wird es nun leicht sein, die Aufgabe zu lösen:

Die Krümmungscurven der abwickelbaren Flächen zu bestimmen. Dass die geraden Linien der abwickelbaren Fläche das eine System von Krümmungscurven sind, ist nach § 74. klar; denn die Normalen der Fläche entlang einer solchen Linie bilden eine Ebene, d. h. eine abwickelbare Fläche. Auch das andre System von Krümmungscurven auf den abwickelbaren Flächen lässt sich sehr einfach definiren. Die Curven dieses Systems müssen die des-

ersten, d. h. die Kanten der abwickelbaren Fläche rechtwinklig schneiden. Daraus folgt z. B. für die Cylinderflächen, dass das andre System die normalen Schnitte des Cylinders sind; für die Kegelflächen, dass es sphärische Curven sind, denn die Kugel schneidet jeden ihrer Radien rechtwinklig; es sind also die Durchschnitte des Kegels mit einer Reihe Kugeln, welche von der Spitze aus als ihrem Mittelpunkte beschrieben sind. Bei der allgemeinsten Abwickelbaren, welche der Ort der Tangente an eine Curve doppelter Krümmung ist, hat man, da jede Curve des zweiten Systems sämmtliche Kanten der Fläche rechtwinklig schneiden muss, vermöge des im vorigen Paragraph bewiesenen Lemma's, wenn $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\ldots$, siehe Fig. 24, eine solche zweite Krümmungscurve ist: $b\alpha = b\beta$, $c\beta = c\gamma$, also $c\beta = b\beta - bc = b\alpha - bc$, $d\gamma = c\beta - cd$ u. s. w. Die Curve $\alpha\,\beta\,\gamma\ldots$ entsteht also dadurch, dass man um $a\,b\,c\ldots$ einen Faden legt, und diesen Faden (von e an) abwickelt. Man kann also unser Resultat folgendermassen aussprechen:

Wenn eine Curve im Raume gegeben ist, und eine gerade Linie sich tangirend an dieser Curve hinbewegt, so beschreibt sie eine abwickelbare Fläche, für welche die gegebene Curve die Wendungskante ist. Jeder Punkt der tangirenden Geraden beschreibt alsdann eine Krümmungscurve des zweiten Systems für die abwickelbare Oberfläche.

8. Krümmungscurven der Flächen zweiten Grades.

§ 77.

Wir wollen nun auch die wichtigsten Sätze anführen, welche über die Krümmungscurven der Flächen zweiten Grades bestehen, und zwar derjenigen Flächen, welche einen Mittelpunkt haben. Der Hauptsatz hierüber ist von Dupin (oder von Binet); er lautet: Die Durchschnittscurve zweier confocalen Flächen zweiten Grades ist eine Krümmungscurve für beide.

Beweis. Ist die Gleichung einer Fläche zweiten Grades mit einem Mittelpunkte folgende: $\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} = 1$, also die der confocalen (d. h. derjenigen, welche in den Hauptschnitten dieselben Brennpunkte besitzen) $\frac{x^2}{\alpha - k} + \frac{y^2}{\beta - k} + \frac{z^2}{\gamma - k} = 1$, so ist eine Normale auf der gegebenen Fläche

$$\frac{\xi - x}{\frac{x}{\alpha}} = \frac{\eta - y}{\frac{y}{\beta}} = \frac{\zeta - z}{\frac{z}{\gamma}} = \lambda$$

und die dieser benachbarte

$$\frac{\xi - x - dx}{\frac{x + dx}{\alpha}} = \frac{\eta - y - dy}{\frac{y + dy}{\beta}} = \frac{\zeta - z - dz}{\frac{z + dz}{\gamma}} = \mu.$$

Dafür, dass diese beiden einander schneiden, (§ 74.), hat man folgende drei Bedingungsgleichungen: $dx + (\mu - \lambda)\frac{x}{\alpha} + \mu\frac{dx}{\alpha} = 0$ oder

$$\begin{cases} \alpha dx + (\mu - \lambda)x + \mu dx = 0 \\ \beta dy + (\mu - \lambda)y + \mu dy = 0\,. \\ \gamma dz + (\mu - \lambda)z + \mu dz = 0 \end{cases}$$

Eliminirt man hieraus $\mu - \lambda$ und μ, so findet man als die Gleichung der Krümmungscurven für die erste Fläche:

$$\alpha dx(y dz - z dy) + \beta dy(z dx - x dz) + \gamma dz(x dy - y dx) = 0,$$

oder mit andrer Anordnung:

$$x dy dz(\beta - \gamma) + y dz dx(\gamma - \alpha) + z dx dy(\alpha - \beta) = 0.$$

Dies ist aber auch die Gleichung der Krümmungscurven für die zweite Fläche, da sie sich nicht ändert, wenn α, β, γ gleichzeitig um k abnehmen. —

dx, dy, dz sind die kleinen Zuwächse, welche x, y, z annehmen, wenn man auf der Curve fortgeht. Da die Curve nun auf der gegebenen Fläche liegt, so hat man für diese Incremente die Gleichung $\frac{x dx}{\alpha} + \frac{y dy}{\beta} + \frac{z dz}{\gamma} = 0$, und weil sie auch auf der zweiten liegt: $\frac{x dx}{\alpha - k} + \frac{y dy}{\beta - k} + \frac{z dz}{\gamma - k} = 0$. Hieraus kann man die Verhältnisse der dx, dy, dz zu einander bestimmen. Wir thun es, indem wir den unbestimmten Factor f einführen:

$$f.x dx = \frac{1}{\beta(\gamma - k)} - \frac{1}{\gamma(\beta - k)} = \frac{\gamma\beta - \gamma k - \beta\gamma + \beta k}{\beta\gamma(\beta - k)(\gamma - k)} = \frac{(\beta - \gamma)k}{\beta\gamma(\beta - k)(\gamma - k)}$$

oder wenn wir statt f das Product: $\frac{f}{k}.\alpha.\beta.\gamma.(\alpha - k).(\beta - k.(\gamma - k) = F$ einführen:

$F.x.dx = \alpha(\beta - \gamma)(\alpha - k)$ und ähnlich $F.y.dy = \beta(\gamma - \alpha)(\beta - k)$ und $F.z.dz = \gamma(\alpha - \beta)(\gamma - k)$. Also wird

$$dy.dz = \frac{\beta\gamma}{F^2.y.z}(\gamma - \alpha)(\alpha - \beta)(\beta - k)(\gamma - k)$$

und ähnlich die andern. Wir können somit die Gleichung der Krümmungscurve durch Substitution dieser Werthe und Multiplication mit F^2 so schreiben:

$$\begin{aligned} &\frac{x}{yz}\beta\gamma(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)(\beta - k)(\gamma - k) \\ &+ \frac{y}{zx}\gamma\alpha(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)(\gamma - k)(\alpha - k) \\ &+ \frac{z}{xy}\alpha\beta(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)(\alpha - k)(\beta - k) = 0 \end{aligned}$$

oder

$$\frac{x^2}{\alpha(\alpha-k)} + \frac{y^2}{\beta(\beta-k)} + \frac{z^2}{\gamma(\gamma-k)} = 0.$$

Dieselbe Gleichung erhält man aber auch, indem man die Gleichungen der beiden confocalen Flächen von einander subtrahirt.

Für diese Flächen ist also die Durchschnittscurve zugleich Krümmungscurve.

§ 78.

Führen wir die weitere Discussion nur für das Ellipsoid fort, so ist die nächste Frage:

In welchem Falle wird das Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ von einer confocalen Fläche $\frac{x^2}{a^2-k} + \frac{y^2}{b^2-k} + \frac{z^2}{c^2-k} - 1 = 0$ geschnitten?

Ist eine Durchschnittscurve vorhanden, so muss für diese jede Combination der beiden vorliegenden Gleichungen, also auch ihre Differenz $\frac{x^2}{a^2(a^2-k)} + \frac{y^2}{b^2(b^2-k)} + \frac{z^2}{c^2(c^2-k)} = 0$ gelten. Diese Gleichung stellt im Allgemeinen einen Kegel dar, der mit dem Ellipsoid concentrisch ist, vorausgesetzt, dass nicht alle drei Glieder derselben gleiches Zeichen haben. Da nun dieses Zeichen von den Grössen a^2-k, b^2-k, c^2-k abhängt, so folgt unmittelbar, dass ein Durchschnitt beider confocalen Flächen stattfinden wird, sobald die drei Grössen a^2-k, b^2-k, c^2-k nicht zugleich positiv oder zugleich negativ sind.

Setzen wir jetzt fest, dass von den drei Halbaxen a die grösste, b die mittlere, c die kleinste sein soll, so muss offenbar $a^2 > k > c^2$ sein, damit ein Durchschnitt stattfindet. Legen wir dem k alle möglichen Werthe bei, von $k = c^2$ anfangend bis zu $k = a^2$ hin, so finden wir: Für $k = c^2$ wird die confocale Fläche zu der Ellipse

$$\begin{cases} z = 0 \\ \frac{x^2}{a^2-c^2} + \frac{y^2}{b^2-c^2} = 1, \end{cases}$$

welche in der Ebene der grössten und mittlern Axe liegt. — Für $c^2 < k < b^2$ erhält man ein einflächiges Hyperboloid und zwar ein schneidendes. — Für $k = b^2$ ergiebt sich die Hyperbel

$$\begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{a^2-b^2} - \frac{z^2}{b^2-c^2} = 1, \end{cases}$$

welche in der Ebene der grössten und kleinsten Axe liegt. (Es ist dies beiläufig dieselbe Hyperbel, von der aus man die Rotationskegel berührend an das Ellipsoid legen kann. Die Scheitel dieser

Hyperbel sind die Brennpunkte der obigen Ellipse, und umgekehrt. Diese Hyperbel und die Ellipse stehen daher, weil ausserdem ihre Ebenen rechtwinklig zu einander sind, in der Beziehung, dass jeder Kegel, dessen Spitze in der einen der beiden Curven liegt und dessen Seiten durch die andre gehen, ein Rotationskegel ist.) — Für $b^2 < k < a^2$ findet man ein zweiflächiges Hyperboloid mit wirklichem Durchschnitt. — Durch jeden Punkt des Ellipsoids lassen sich also zwei confocale Flächen legen, nämlich ein Hyperboloid der ersten Art und eins der andern Art. Denn ist x, y, z ein Punkt des Ellipsoids, so kommt es nur darauf an, die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2-k}+\frac{y^2}{b^2-k}+\frac{z^2}{c^2-k}=1$$

nach k aufzulösen, welche ausser der Wurzel $k=0$, die das Ellipsoid selber ergiebt, nur noch zwei Wurzeln hat. Hieraus folgt: Sämmtliche Krümmungscurven des Ellipsoids sind die Durchschnitte des Ellipsoids mit sämmtlichen Hyperboloiden, welche dem Ellipsoid confocal sind.

§ 79.

Schreibt man die Gleichung für k in folgende Form:

$$\frac{x^2}{a^2(a^2-k)}+\frac{y^2}{b^2(b^2-k)}+\frac{z^2}{c^2(c^2-k)}=0,$$

so lässt sich sofort übersehen, dass sie keine imaginären Wurzeln haben kann. Setzt man der Kürze halber $\frac{x^2}{a^2}=\xi^2 \quad \frac{y^2}{b^2}=\eta^2 \quad \frac{z^2}{c^2}=\zeta^2$, so wird sie $\frac{\xi^2}{a^2-k}+\frac{\eta^2}{b^2-k}+\frac{\zeta^2}{c^2-k}=0$. Hätte diese Gleichung imaginäre Wurzeln, z. B. $l+l'i$ und $l-l'i$, so müssten folgende beiden Gleichungen stattfinden

$$\frac{\xi^2}{a^2-l-l'i}+\frac{\eta^2}{b^2-l-l'i}+\frac{\zeta^2}{c^2-l-l'i}=0$$

und

$$\frac{\xi^2}{a^2-l+l'i}+\frac{\eta^2}{b^2-l+l'i}+\frac{\zeta^2}{c^2-l+l'i}=0,$$

also auch ihre Differenz

$$\frac{2\xi^2 l'i}{(a^2-l)^2+l'^2}+\frac{2\eta^2 l'i}{(b^2-l)^2+l'^2}+\frac{2\zeta^2 l'i}{(c^2-l)^2+l'^2}=0:$$

diese Gleichung aber könnte nur dadurch bestehen, dass der gemeinschaftliche Factor $l'=0$ wäre: die Wurzeln für k enthalten folglich i nicht, sondern sind reell.

Es ist leicht zu übersehen, dass man von einer ähnlichen Gleichung, auch wenn sie mehrere Glieder hat, immer dasselbe auf die-

selbe Art wird beweisen können; denn die Anzahl der Glieder bildete kein Moment des Beweises.

Löst man nun unsre Gleichung nach k auf, so wird sie folgende Gestalt annehmen:

$$x^2b^2c^2(b^2-k)(c^2-k)+y^2c^2a^2(c^2-k)(a^2-k)+z^2a^2b^2(a^2-k)(b^2-k)=0$$

oder

$$k^2(b^2c^2x^2+c^2a^2y^2+a^2b^2z^2)-k\big(b^2c^2(b^2+c^2)x^2+c^2a^2(c^2+a^2)y^2 \\ +a^2b^2(a^2+b^2)z^2\big)+b^4c^4x^2+c^4a^4y^2+a^4b^4z^2=0.$$

Der Coefficient des Quadrates von k ist vermöge der Gleichung des Ellipsoides $a^2b^2c^2$. Dividirt man daher mit diesem Factor die ganze Gleichung, so wird, wenn man die beiden Wurzeln von k mit k_1 und k_2 bezeichnet:

$$(k_1+k_2)a^2b^2c^2=b^2c^2(b^2+c^2)x^2+c^2a^2(c^2+a^2)y^2+a^2b^2(a^2+b^2)z^2$$
$$k_1 \,.\, k_2 \,.\, a^2b^2c^2=b^4c^4x^2+c^4a^4y^2+a^4b^4z^2.$$

Nimmt man hierzu die Gleichung des Ellipsoids

$$a^2b^2c^2=b^2c^2x^2+c^2a^2y^2+a^2b^2z^2,$$

so hat man drei Gleichungen, aus welchen man x, y, z als Functionen der beiden neuen Veränderlichen k_1 und k_2 darstellen kann. Multiplicirt man nämlich die erste mit $-a^2$, die dritte mit $+a^4$, und addirt alsdann alle drei, so fallen die Glieder mit y^2 und z^2 hinweg und man erhält:

$$a^6b^2c^2-a^4b^2c^2(k_1+k_2)+a^2b^2c^2k_1k_2=\left\{a^4b^2c^2-a^2b^2c^2(b^2+c^2)+b^4c^4\right\}x^2$$

oder

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{(a^2-k_1)(a^2-k_2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}$$

und analog

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{(b^2-k_1)(b^2-k_2)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)} \text{ und } \frac{z^2}{c^2}=\frac{(c^2-k_1)(c^2-k_2)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}.$$

§ 80.

Setzen wir nun wiederum folgendes Grössenverhältnis unter den Halbaxen fest: $a>b>c$, so ist bei $\frac{x^2}{a^2}$ der Nenner positiv, folglich muss es der Zähler auch sein, d. h. es müssen k_1 und k_2 gleichzeitig entweder $< a^2$ oder $> a^2$ sein. Bei $\frac{y^2}{b^2}$ ist der Nenner negativ, also muss es der Zähler auch sein, d. h. von den Grössen k_1 und k_2 muss eine grösser, die andre kleiner als b^2 sein. Bei $\frac{z^2}{c^2}$ endlich muss der Zähler wiederum positiv sein, weil der Nenner es ist; es müssen

also k_1 und k_2 beide entweder $> c^2$ oder beide $< c^2$ sein. Dies alles kann aber zusammen nur dann bestehen, wenn man folgende Reihenfolge der hier in Betracht kommenden Grössen hat: c^2 k_2 b^2 k_1 a^2, vorausgesetzt, dass die grössere Wurzel der quadratischen Gleichung für k durch k_1 bezeichnet wird.

Addirt man die drei zu Ende des vorigen Paragraphen aufgestellten Gleichungen, so erhält man die Gleichung des Ellipsoids. Schreibt man sie aber so:

$$\frac{x^2}{a^2-k_1} = \frac{a^2(a^2-k_2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)} \quad \frac{y^2}{b^2-k_1} = \frac{b^2(b^2-k_2)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}$$

$$\frac{z^2}{c^2-k_1} = \frac{c^2(c^2-k_2)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}$$

und addirt sie jetzt, so ergiebt sich

$$\frac{x^2}{a^2-k_1} + \frac{y^2}{b^2-k_1} + \frac{z^2}{c^2-k_1} = 1;$$

also alle Punkte, für welche k_1 constant ist, liegen auf einem zweifächrigen Hyperboloid. Ebenso findet man die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2-k_2} + \frac{y^2}{b^2-k_2} + \frac{z^2}{c^2-k_2} = 1,$$

welche bedeutet, dass alle Punkte, für welche k_2 constant ist, auf einem einfächrigen Hyperboloide liegen. Demnach kann man sagen: die Gleichungen, in welchen die Coordinaten x, y, z als Functionen der beiden neuen Veränderlichen k_1 und k_2 dargestellt werden, drücken jeden Punkt des Ellipsoids aus als Durchschnitt zweier Curven, die man dadurch erhält, dass man den Grössen k_1 und k_2 bestimmte Werthe beilegt. Diese Curven sind, wie wir wissen, Krümmungscurven des Ellipsoids.

Anmerkung. Diesen Gleichungen lässt sich eine trigonometrische Form geben, welche für manche Zwecke bequemer, wenn auch weniger symmetrisch ist. Wir setzen

$$\frac{k_1-b^2}{a^2-b^2} = \cos^2 u, \quad \frac{b^2-k_2}{b^2-c^2} = \cos^2 v,$$

so wird zunächst $y = b.\cos u.\cos v$. Ferner findet man

$$k_1 = b^2 + (a^2-b^2)\cos^2 u \quad \text{und} \quad k_2 = b^2 - (b^2-c^2)\cos^2 v,$$

also

$$a^2-k_1 = (a^2-b^2)\sin^2 u \quad \text{und} \quad a^2-k_2 = a^2-b^2+(b^2-c^2)\cos^2 v.$$

Es wird folglich

$$\frac{x^2}{a^2} = \sin^2 u\left(\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2} + \frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}\cos^2 v\right),$$

oder wenn wir

$$\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2} = \lambda^2, \quad \frac{b^2-c^2}{a^2-c^2} = \lambda'^2$$

setzen, wodurch $\lambda^2 + \lambda'^2 = 1$ wird:

$$\frac{x^2}{a^2} = \sin^2 u\,(1 - \lambda'^2 \sin^2 v).$$

Eine ähnliche Formel findet man für z; nämlich man bekommt

$$\frac{z^2}{c^2} = \sin^2 v\,(1 - \lambda^2 \sin^2 u).$$

Setzt man nun die $\sqrt{1 - \lambda'^2 \sin^2 v} = \Delta'$, $\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u} = \Delta$, so hat man folglich als trigonometrische Form der elliptischen Coordinaten folgende Gleichungen:

$$x = a \sin u . \Delta' \quad y = b \cos u . \cos v \quad z = c \sin v . \Delta.$$

u und v sind also die Parameter der Krümmungscurven.

§ 81.

Aufgabe. Es ist ein Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ gegeben und irgendwo ein Punkt ξ, η, ζ. Man soll die confocalen Flächen, welche durch diesen Punkt gehen, bestimmen.

Die Auflösung besteht darin, dass man die drei Wurzeln, welche K aus der Gleichung $\frac{\xi^2}{a^2 - K} + \frac{\eta^2}{b^2 - K} + \frac{\zeta^2}{c^2 - K} = 1$ annimmt, bestimmt. Keine der drei Wurzeln ist, wie wir wissen, imaginär.

Bestimmt man die Coordinaten ξ, η, ζ, welche irgend einem Punkte des Raumes angehören, durch die drei Wurzeln der obigen Gleichung, welche k, k_1, k_2 sein mögen, d. h. löst man die drei Gleichungen

$$\frac{\xi^2}{a^2 - k} + \frac{\eta^2}{b^2 - k} + \frac{\zeta^2}{c^2 - k} = 1 \quad \frac{\xi^2}{a^2 - k_1} + \frac{\eta^2}{b^2 - k_1} + \frac{\zeta^2}{c^2 - k_1} = 1$$
$$\frac{\xi^2}{a^2 - k_2} + \frac{\eta^2}{b^2 - k_2} + \frac{\zeta^2}{c^2 - k_2} = 1$$

nach ξ, η, ζ auf, so erhält man

$$\xi^2 = \frac{(a^2 - k)(a^2 - k_1)(a^2 - k_2)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} \quad \eta^2 = \frac{(b^2 - k)(b^2 - k_1)(b^2 - k_2)}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)}$$
$$\zeta^2 = \frac{(c^2 - k)(c^2 - k_1)(c^2 - k_2)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}.$$

Diese drei Gleichungen enthalten ein neues Coordinatensystem. Sie geben nämlich nicht die Coordinaten ξ, η, ζ eines Punktes an, sondern die drei Grössen k, k_1, k_2, welche die drei confocalen Flächen bestimmen; oder, wie man auch sagen kann: Sie geben jeden Punkt im Raume nicht als Ecke eines Parallelepipedons, sondern als Durchschnitt dreier confocalen Flächen. Der Ursprung dieser Betrachtungen geht auf Euler zurück. Er hatte sich die Aufgabe gestellt:

Wenn zwei Punkte gegeben sind, und ein dritter von diesen beiden nach dem bekannten Newton'schen Gesetze angezogen wird, die Bewegung dieses Punktes zu bestimmen. Die Integration, auf welche er dabei kam, gelang ihm, indem er statt der rechtwinkligen Coordinaten x und y zwei andre Grössen einführte, die nach einer Bemerkung, welche später Legendre gemacht hat, den Grössen k, k_1, k_2 im Raume analog sind; setzt man nämlich die eine der beiden Hilfsgrössen, welche Euler anwendete, constant, so erhält man lauter Punkte, die auf einer Ellipse liegen, welche die gegebenen festen Punkte zu Brennpunkten hat. Setzt man die andre Hilfsgrösse constant, so bekommt man Punkte einer Hyperbel, welche mit der Ellipse confocal ist. Euler bestimmte also jeden Punkt der Ebene als den Durchschnitt zweier confocalen Kegelschnitte.

§ 82.

Die wichtigste Anwendung der elliptischen Coordinaten ist die zur Berechnung der Oberfläche eines Ellipsoids. Das Oberflächen-Element ist $= \sqrt{E.G - F^2}\, du\, dv$, wobei für die elliptischen Coordinaten die Grösse $F = 0$ ist, weil hier die Curven U und V sich rechtwinklig schneiden. Es ist nun vermöge der elliptischen Coordinaten

$$x = a \sin u \varDelta' \quad y = b \cos u \cos v \quad z = c \sin v \varDelta$$

wo

$$\varDelta' = \sqrt{1 - \lambda'^2 \sin^2 v} \quad \varDelta = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u} \quad \text{und} \quad \lambda^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} \quad \lambda'^2 = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}$$

also $\lambda'^2 + \lambda^2 = 1$ ist:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = a \cos u \varDelta' \quad \frac{\partial y}{\partial u} = -\, b \sin u \cos v \quad \frac{\partial z}{\partial u} = -\, \frac{\lambda^2 c \sin v \sin u \cos u}{\varDelta};$$

also wird die Grösse

$$E = a^2 \cos^2 u - a^2 \lambda'^2 \cos^2 u \sin^2 v + b^2 \sin^2 u \cos^2 v + \frac{\lambda^4 c^2 \sin^2 u \cos^2 u \sin^2 v}{1 - \lambda^2 \sin^2 u}.$$

Setzt man hierin statt $\sin^2 v$ überall $1 - \cos^2 v$, so nimmt E die Form an: $E = P + Q \cos^2 v$. Es ist nun

$$P = a^2 \cos^2 u - a^2 \cos^2 u \lambda'^2 + \frac{c^2 \lambda^4 \sin^2 u \cos^2 u}{1 - \lambda^2 \sin^2 u}$$

$$= \lambda^2 \cos^2 u \left\{ a^2 + \frac{c^2 \lambda^2 \sin^2 u}{1 - \lambda^2 \sin^2 u} \right\} = \frac{\cos^2 u \lambda^2}{\varDelta^2} \left\{ a^2 \varDelta^2 + c^2 \lambda^2 \sin^2 u \right\}$$

$$= \frac{\cos^2 u \lambda^2}{\varDelta^2} \left\{ a^2 - (a^2 - c^2) \lambda^2 \sin^2 u \right\} = \frac{\cos^2 u \lambda^2}{\varDelta^2} \left\{ a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u \right\}$$

und

$$Q = a^2 \lambda'^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u - \frac{c^2 \lambda^4 \sin^2 u \cos^2 u}{1 - \lambda^2 \sin^2 u}$$

oder weil

$$\lambda^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} \text{ also } - c^2 \lambda^2 = a^2 \lambda'^2 - b^2,$$

$$Q = a^2 \lambda'^2 \cos^2 u \left\{1 + \frac{\lambda^2 \sin^2 u}{1 - \lambda^2 \sin^2 u}\right\} + b^2 \sin^2 u \left\{1 - \frac{\lambda^2 \cos^2 u}{1 - \lambda^2 \sin^2 u}\right\}$$

$$= \frac{\lambda'^2}{\Delta^2} \left\{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u\right\}.$$

Also wird

$$E = \frac{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u}{\Delta^2} \left\{\lambda^2 \cos^2 u + \lambda'^2 \cos^2 v\right\};$$

ebenso

$$G = \frac{c^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v}{\Delta'^2} \left\{\lambda^2 \cos^2 u + \lambda'^2 \cos^2 v\right\},$$

demnach das Oberflächenelement

$$= du . dv . \frac{\lambda^2 \cos^2 u + \lambda'^2 \cos^2 v}{\Delta . \Delta'} \cdot \sqrt{(a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u)(c^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v)}.$$

Integrirt man diesen Ausdruck innerhalb 0 und $\frac{\pi}{2}$ nach beiden Variabeln u und v, so erhält man den Octanten des Ellipsoids; man findet somit das ganze Ellipsoid gleich achtmal folgendem Ausdruck

$$\lambda^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 u \sqrt{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u}}{\Delta} du . \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{c^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v}}{\Delta'} dv$$

$$+ \lambda'^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u}}{\Delta} du . \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 v \sqrt{c^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v}}{\Delta'} dv.$$

§ 83.

Der Dupin'sche Satz, dass sich zwei confocale Flächen in Krümmungscurven schneiden, ist von Dupin selbst auf je drei Systeme sich rechtwinklig schneidender Flächen erweitert worden. Dieser erweiterte Satz ergiebt sich als Folgerung aus dem nachfolgenden Lehrsatz:

Wenn drei Flächen $F = 0$ $F_1 = 0$ $F_2 = 0$ in ihren Durchschnittspunkten normal auf einander stehen, so sind in dem Punkte, in welchem alle drei Flächen sich schneiden, die Tangenten der Durchschnittscurven zu gleicher Zeit die Tangenten der Krümmungscurven oder Haupttangenten.

Die beiden Flächen F und F_1 mögen sich in der Curve 1, siehe Fig. 25, die beiden F_1 und F_2 in der Curve 2, und F_2 und F in der Curve 3 schneiden. Behalten wir die in § 40. angegebenen Be-

zeichnungen für die partiellen Differentialquotienten von F bei, und bezeichnen die entsprechenden Ableitungen der Functionen F_1 und F_2 durch die entsprechenden Buchstaben mit dem Index 1 resp. 2, so haben wir folgende drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&1)\ \text{damit } F \perp F_1: \quad P.P_1 + Q.Q_1 + R.R_1 = 0 \\
&2)\ \text{damit } F_1 \perp F_2: \quad P_1.P_2 + Q_1.Q_2 + R_1.R_2 = 0 \\
&3)\ \text{damit } F_2 \perp F: \quad P_2.P + Q_2.Q + R_2.R = 0.
\end{aligned}$$

Die Gleichung (1) findet nun nicht blos in einem bestimmten Punkte, sondern entlang der ganzen Curve 1 statt. Wir dürfen sie daher differentiiren, und erhalten dadurch folgende Gleichung

$$4)\ P.dP_1 + Q.dQ_1 + R.dR_1 + P_1.dP + Q_1.dQ + R_1.dR = 0,$$

in welcher Gleichung

$$dP = L dx + N' dy + M' dz \quad dQ = N' dx + M dy + L' dz$$
$$dR = M' dx + L' dy + N dz$$

ist und ähnliche Werthe für dP_1, dQ_1, dR_1 gelten. Die Differentiale der Coordinaten, welche hier vorkommen, haben folgende Eigenschaft: Bezeichnet man das Curvenelement von 1 mit ds, so ist die Gleichung der Tangente von 1 in irgend einem Punkte

$$\frac{\xi - x}{\frac{dx}{ds}} = \frac{\eta - y}{\frac{dy}{ds}} = \frac{\zeta - z}{\frac{dz}{ds}};$$

die Normale der Fläche F_2 ist ferner $\frac{\xi - x}{P_2} = \frac{\eta - y}{Q_2} = \frac{\zeta - z}{R_2}$. Im Punkte O sind beide Geraden identisch. Bezeichnet man also die $\sqrt{P_2^2 + Q_2^2 + R_2^2}$ durch h_2, so hat man für Punkt O die Gleichungen: $\frac{dx}{ds} = \frac{P_2}{h_2}$, $\frac{dy}{ds} = \frac{Q_2}{h_2}$, $\frac{dz}{ds} = \frac{R_2}{h_2}$. Demnach werden in der Gleichung (4) die ersten drei Glieder

$$\begin{aligned}
P.dP_1 + Q.dQ_1 + R.dR_1 &= P\left\{L_1.dx + N_1'.dy + M_1'.dz\right\} \\
&+ Q\left\{N_1' dx + M_1 dy + L_1' dz\right\} + R\left\{M_1' dx + L_1' dy + N_1 dz\right\} \\
&= \frac{ds}{h_2}\Big\{P_2\left\{PL_1 + QN_1' + RM_1'\right\} + Q_2\left\{PN_1' + QM_1 + RL_1'\right\} \\
&\qquad + R_2\left\{PM_1' + QL_1' + RN_1\right\}\Big\} \\
= \frac{ds}{h_2}\Big\{L_1 PP_2 + M_1 QQ_2 &+ N_1 RR_2 + L_1'(Q_2 R + R_2 Q) \\
&+ M_1'(R_2 P + P_2 R) + N_1'(P_2 Q + Q_2 P)\Big\}.
\end{aligned}$$

Setzen wir daher

$$L_1 PP_2 + M_1 QQ_2 + \cdots + N_1'(P_2 Q + Q_2 P) = U_1$$

und analog

$$L P_1 P_2 + M Q_1 Q_2 + \cdots + N'(P_2 Q_1 + Q_2 P_1) = U$$

und

$$L_2 P P_1 + M_2 Q Q_1 + \cdots + N_2'(P_1 Q + Q_1 P) = U_2,$$

so wird zunächst die Gleichung (4) $\frac{ds}{h_2} . U_1 + \frac{ds}{h_2} . U = 0$; denn in Beziehung auf F_2 sind die ersten drei Glieder von den letzten dreien nicht verschieden. Aehnliche Gleichungen erhält man durch die Differentiation der beiden andern Gleichungen, wobei nur zu merken ist, dass die Differentialgleichungen zwar noch in der ganzen Ausdehnung der entsprechenden Durchschnittscurve gelten, die resultirenden Gleichungen in U, U_1, U_2 aber nur für den Punkt O, weil nur für diesen Punkt die zu ihrer Ableitung nothwendige Beziehung besteht, dass die Tangente an die Durchschnittscurve zweier der gegebenen Flächen Normale zu der dritten Fläche ist. Lassen wir daher in den resultirenden Gleichungen die gemeinschaftlichen Factoren weg, so erhalten wir für Punkt O folgende Gleichungen: $U_1 + U = 0$ $U_2 + U_1 = 0$ $U + U_2 = 0$. Diese ergeben als Summe $U + U_1 + U_2 = 0$ und folglich, wenn man jetzt von dieser Summe jede der vorigen drei Gleichungen subtrahirt: $U = 0$ $U_1 = 0$ $U_2 = 0$. Die Gleichung $U = 0$ oder $U . \frac{ds}{h_2}$ oder $P_1 . dP + Q_1 . dQ + R_1 . dR = 0$, ferner die Gleichung (1) nämlich $P_1 . P + Q_1 . Q + R_1 . R = 0$ und folgende Gleichung, welche angiebt, dass im Punkte O die Tangente an die Curve 1 normal steht auf der Normale der Fläche $F_1 = 0$, nämlich $P_1 . dx + Q_1 . dy + R_1 . dz = 0$; diese drei Gleichungen ergeben, wenn man die Quotienten P_1 Q_1 R_1 eliminirt:

$$\begin{vmatrix} P & Q & R \\ dP & dQ & dR \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0$$

für Punkt O. Diese Gleichung ist gleichzeitig die für die Krümmungscurve der Fläche $F = 0$, d. h. sie giebt die Richtung der Haupttangenten im Punkte O an. Man findet also: im Punkte O ist die Tangente der Curve 1 zugleich Haupttangente der Fläche $F = 0$. Aehnliches gilt für die andern Durchschnittscurven.

§ 84.

Folgerung. (Der erweiterte Dupin'sche Satz.) Wenn drei Systeme sich rechtwinklig schneidender Flächen gegeben sind, so ist der Durchschnitt von je zweien eine Krümmmungscurve für beide.

Es sei $F = 0$ (Fig. 26) eine Fläche des einen, $F_1 = 0$ eine des zweiten, $F_2 = 0$ eine des dritten Systems, die sich überall rechtwinklig schneiden sollen. Die Fläche F wird aber nicht nur von den Flächen F_1 und F_2 rechtwinklig geschnitten, sondern noch von F_1' F_2', F_1'' F_2'', F_1''' F_2''' u. s. w. bis ins Unendliche, welche paarweis sich wieder selbst rechtwinklig schneiden. Nennen wir daher den Punkt $(F, F_1, F_2') = O'$, den Punkt $(F, F_1, F_2'') = O''$ u. s. w., so sind diese Punkte, welche wir als aufeinanderfolgende Punkte betrachten dürfen, alles Punkte wie O, d. h. in ihnen ist die Tangente an ihre Curve Haupttangente an die betreffenden Flächen. Die Punkte $O, O', O'' \cdots$ liegen aber auf der Curve 1, mithin ist 1 Krümmungscurve für die beiden Flächen $F = 0$ und $F_1 = 0$, deren Durchschnitt sie ist; und so ist es mit allen andern Durchschnittscurven.

Hieraus ergiebt sich nun der (§ 77.) nicht eigentlich bewiesene, sondern nur verificirte Satz als specieller Fall, dass nämlich die Durchschnitte eines Ellipsoids mit den confocalen Flächen oder überhaupt die Durchschnittscurven der confocalen Flächen Krümmungscurven sind. Denn durch jeden Punkt im Raume lassen sich drei Systeme confocaler Flächen legen (§ 81.), und diese schneiden sich rechtwinklig. Für jeden Punkt des Durchschnitts findet bekanntlich die Gleichung $\frac{x^2}{\alpha(\alpha - k)} + \frac{y^2}{\beta(\beta - k)} + \frac{z^2}{\gamma(\gamma - k)} = 0$ statt. Dieselbe Gleichung giebt aber auch an, dass die Tangenten an die Durchschnittscurven auf einander normal stehen. Denn an die Flächen $\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} = 1$ und $\frac{x^2}{\alpha - k} + \frac{y^2}{\beta - k} + \frac{z^2}{\gamma - k} = 1$, deren Durchschnitt die obige Gleichung hat, sind die Tangentialebenen resp. $\frac{x}{\alpha}\xi + \frac{y}{\beta}\eta + \frac{z}{\gamma}\zeta = 1$ und $\frac{x}{\alpha - k}\xi + \frac{y}{\beta - k}\eta + \frac{z}{\gamma - k}\zeta = 1$, und diese stehen auf einander normal, wenn

$$\frac{x}{\alpha} \cdot \frac{x}{\alpha - k} + \frac{y}{\beta} \cdot \frac{y}{\beta - k} + \frac{z}{\gamma} \cdot \frac{z}{\gamma - k} = 0.$$

Dies ist zugleich die Gleichung des Durchschnitts.

§ 85.

Als Schluss der Lehre von den Krümmungscurven wollen wir noch einen Beweis für den (in § 63.) angeführten Gauss'schen Satz geben, nämlich für den Satz:

Der Quotient $\frac{\sigma}{s}$, wenn σ und s die dort festgesetzten Bedeutungen haben, ist gleich dem reciproken Werth des Products $\varrho_1 . \varrho_2$.

Nehmen wir ein unendlich kleines krummliniges Viereck $s_0 = ABDC$ auf einer gegebenen Fläche an, siehe Fig. 27, dessen gegenüber-

liegende Seiten Bogen von Krümmungscurven seien, und ziehen die Normalen in dreien seiner Eckpunkte: die Normale in A, welche von der in B im Punkte α geschnitten wird, und die Normale in C, welche die von A im Punkte β schneidet; nennen wir ferner das auf einer Kugel vom Radius 1 durch parallele Normalen bestimmte ebenfalls unendlich kleine Viereck $abdc = \sigma_0$, dessen Normalen sich im Mittelpunkte M der Kugel schneiden: so ist zunächst $\sphericalangle CAB = cab = R$. Wir können folglich beide Vierecke wegen ihrer verschwindenden Kleinheit als Rechtecke ansehen, und es ist mithin der Inhalt von $s_0 = AC.AB$, der von $\sigma_0 = ac.ab$. Nun ist

$$AB = A\alpha.(A\alpha, B\alpha) = A\alpha.(aM, bM) = A\alpha.\frac{ab}{aM} = A\alpha.ab$$

und $AC = A\beta.(A\beta, C\beta) = A\beta.ac$. $A\alpha$ und $A\beta$ sind aber die Hauptkrümmungsradien für Punkt A der gegebenen Fläche: $A\alpha = \varrho_1$ $A\beta = \varrho_2$; mithin wird $\frac{\sigma_0}{s_0} = \frac{ac.ab}{\varrho_1.ab.\varrho_2.ac} = \frac{1}{\varrho_1.\varrho_2}$. — Nehmen wir nun ein beliebiges Oberflächenelement σ, so können wir es uns immer durch die Krümmungscurven der Fläche in unzählig viele gegen das Element σ selbst unendlich kleine solche Rechtecke zerlegen wie σ_0 ist; für jedes solche Viereck σ_0 gilt der Satz wie bewiesen ist. Die Grösse $\frac{1}{\varrho_1.\varrho_2}$ ist nun zwar nicht dieselbe für alle die σ_0; da aber die σ_0 selbst nur unendliche kleine Grössen zweiter Ordnung sind, so sind es ihre Aenderungen ebenfalls; diese kann man somit vernachlässigen, und der Satz gilt allgemein für ein Element von beliebiger Grösse.

9. Die Theorie der kürzesten (geodätischen) Linien auf den Flächen.

§ 86.

Lehrsatz. Die kürzeste Linie zwischen je zwei gegebenen Punkten einer Fläche hat die Eigenschaft, dass ihre Schmiegungsebene durch die Normale der Fläche geht, in jedem Punkte der Linie, oder, was absolut dasselbe ist, dass der Krümmungsradius zugleich eine Normale der Fläche ist.

Beweis. Auf der Fläche $F(x, y, z) = 0$ seien zwei Punkte $(1) = (a, b, c)$ $(3) = (a', b', c')$ gegeben. Es handle sich zunächst darum, einen Punkt $(2) = (x, y, z)$ auf der Fläche zu finden, so dass die Summe der beiden Sehnen $(1, 2) + (2, 3)$ ein Minimum werde. Wir haben also, wenn wir die erste Sehne u, die zweite u' nennen, den Ausdruck $u + u'$ zum Minimum zu machen, und zwar ist $u^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$ $u'^2 = (a'-x)^2 + (b'-y)^2 + (c'-z)^2$,

worin noch x, y, z der Gleichung $F(x, y, z) = 0$ genügen. Dies ist somit eine Aufgabe des sogenannten relativen Minimums. (Vgl. § 48.)

Wir haben also die Summe $u + u' + \lambda F$ nach x, y, z partiell zu differentiiren und die Differentialquotienten gleich Null zu setzen:

$$\frac{a'-x}{u'} - \frac{x-a}{u} = \lambda . P \quad \frac{b'-y}{u'} - \frac{y-b}{u} = \lambda . Q \quad \frac{c'-z}{u'} - \frac{z-c}{u} = \lambda . R.$$

Diese Gleichungen ergeben zusammen mit der Gleichung $F(x, y, z) = 0$ die Werthe für λ, x, y, z. Die Aufgabe ist uns aber nur wichtig in dem Grenzfalle, dass die Punkte (a, b, c) und (a', b', c') unendlich nahe an einander liegen. Setzen wir $x - a = \Delta x$, so ist $\frac{\Delta x}{u}$ bekanntlich der Cosinus des Winkels, den die Sehne u mit der Axe der x macht. Rücken (1) und (2) einander unendlich nahe, so geht der Bruch in $\frac{dx}{ds}$ über, denn die Sehne wird zur Tangente; die Sehne u' wird alsdann zur nächsten Tangente, deren Winkel mit der x Axe folglich den Cosinus $\frac{dx}{ds} + d\frac{dx}{ds}$ hat: dies ist die Grenze von $\frac{a'-x}{u'}$. Somit wird $\lim\left(\frac{a'-x}{u'} - \frac{x-a}{u}\right) = \left(\frac{dx}{ds} + d\frac{dx}{ds}\right) - \frac{dx}{ds}$ oder $d\frac{dx}{ds} = \lambda P$. Man erhält also jetzt folgende drei Gleichungen:

$$d\frac{dx}{ds} = \lambda . P \quad d\frac{dy}{ds} = \lambda . Q \quad d\frac{dz}{ds} = \lambda . R.$$

Nehmen wir s als unabhängige Veränderliche, also ds als constant an und dividiren diese Gleichungen durch ds, so werden sie:

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \mu . P \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \mu . Q \quad \frac{d^2z}{ds^2} = \mu . R,$$

wenn der constante Bruch $\frac{\lambda}{ds} = \mu$ gesetzt wird. Diese drei Gleichungen aber enthalten unsern Lehrsatz: die linken Seiten unsrer Gleichungen sind proportional den Cosinus der Winkel, welche der Krümmungshalbmesser, rechts den Cosinus der Winkel, welche die Normale der Fläche mit den drei Axen bildet; also fällt der Krümmungshalbmesser längs der ganzen Ausdehnung der kürzesten Linie zusammen mit der entsprechenden Normale der Fläche.

87.§

Aufgabe. Die Gleichung der kürzesten Linie herzuleiten.

Schreiben wir die drei Endgleichungen des vorigen Paragraphen

so, dass die unabhängige Veränderliche unbestimmt bleibt, so gehen sie über in folgendes System:

$$\frac{ds\,d^2x - dx\,d^2s}{ds^2} = \mu.P \quad \frac{ds\,d^2y - dy\,d^2s}{ds^2} = \mu.Q \quad \frac{ds\,d^2z - dz\,d^2s}{ds^2} = \mu.R.$$

Diese drei Gleichungen enthalten aber noch die constante Grösse μ. Eliminirt man diese, so erhält man nur noch zwei Gleichungen, welche sich aber wiederum auf eine reduciren, indem von jenen drei Gleichungen aus zweien immer die dritte folgt. Dies sieht man daraus, dass man aus ihnen eine identische Gleichung ableiten kann, und zwar, indem man sie der Reihe nach mit dx, dy, dz multiplicirt und die Producte addirt. Dann erhält man links, weil

$dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z = ds.d^2s$ und $(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (ds)^2$

ist: $\frac{ds.ds.d^2s - (ds)^2.d^2s}{ds^2}$, und das ist Null. Rechts erhält man μ multiplicirt mit der Summe $P.dx + Q.dy + R.dz$, und diese ist auch Null. Alle drei Gleichungen vertreten somit nur die Stelle von einer, und diese kann man, indem man jene Gleichungen der Reihe nach mit $dy\,d^2z - dz\,d^2y$, $dz\,d^2x - dx\,d^2z$, $dx\,d^2y - dy\,d^2x$ multiplicirt, und alsdann addirt, folgendermassen schreiben:

$$0 = P(dy\,d^2z - dz\,d^2y) + Q\,(dz\,d^2x - dx\,d^2z) + R\,(dx\,d^2y - dy\,d^2x).$$

Diese Gleichung zeigt auch unmittelbar an, dass die Schmiegungsebene in jedem Punkte der Curve durch die Normale der Fläche geht. Denn die Gleichung der Schmiegungsebene lautet

$$(\xi - x)(dyd^2z - dzd^2y) + (\eta - y)(dzd^2x - dxd^2z) + (\zeta - z)(dxd^2y - dyd^2x) = 0,$$

und die der Normale

$$\frac{\xi - x}{P} = \frac{\eta - y}{Q} = \frac{\zeta - z}{R}.$$

Wir können die Gleichung der kürzesten Linie auch in der Form der Determinanten schreiben:

$$\begin{vmatrix} dx & d^2x & P \\ dy & d^2y & Q \\ dz & d^2z & R \end{vmatrix} = 0.$$

Dann wird sie ähnlich der Gleichung der Krümmungscurven:

$$\begin{vmatrix} dx & P & dP \\ dy & Q & dQ \\ dz & R & dR \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichung der kürzesten Linie enthält x, y, dx, dy, d^2x, d^2y weil man z und seine Differentialquotienten mittelst der Gleichung der Fläche zu eliminiren hat. Sieht man x als unabhängige Variable

an, so ist folglich die Gleichung der kürzesten Linie eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung, und hat als solche zwei Constanten. Daraus folgt, dass man auf der Fläche zwischen zwei beliebigen Punkten immer eine kürzeste Linie ziehen kann, und dass von jedem Punkte der Fläche aus unzählig viele kürzeste Linien sich erstrecken.

Ist die Gleichung der Fläche in der Form $z = \varphi(x, y)$ gegeben, so kann man die Gleichung der kürzesten Linie so schreiben:

$$dx(-d^2y - q\,d^2z) + p\,(dy\,d^2z - dz\,d^2y) = 0$$

oder geordnet

$$d^2y\,(dx + p\,dz) + d^2z\,(q\,dx - p\,dy) = 0.$$

Hierin hat man noch aus der Gleichung der Fläche

$$dz = p\,dx + q\,dy \quad d^2z = dp\,dx + dq\,dy + q\,d^2y$$

$$dp = r\,dx + s\,dy \quad dq = s\,dx + t\,dy$$

einzusetzen.

§ 88.

Geometrischer Beweis des Lehrsatzes in § 86. Nimmt man zwei Elemente einer abwickelbaren Fläche 1 und 2, siehe Fig. 28a, und denkt sich das Element 2 in die Ebene des Elements 1 gedreht, so ist jede gerade Linie eine kürzeste Linie der Fläche; denken wir uns also das Element 2 um die Kante, welche es mit 1 gemeinschaftlich hat, in seine ursprüngliche Lage zurückgedreht, wodurch c nach γ fallen mag und der Drehungswinkel natürlich unendlich klein ist, so sind ab, $b\gamma$ zwei aufeinanderfolgende Elemente der kürzesten Linie der Fläche zwischen a und einem gewissen zweiten Punkt. Die Ebene $ab\gamma$ ist die Schmiegungsebene der kürzesten Linie. Da aber bc die Verlängerung von ab ist, so ist die Ebene γbc identisch mit der Ebene γba. Die Ebene γbc ist aber offenbar normal auf dem Element 1. Bei den abwickelbaren Flächen geht also die Schmiegungsebene der kürzesten Linie durch die Normale der Fläche.

Sind nun ab und $b\gamma$ zwei auf einanderfolgende Elemente der kürzesten Linie irgend einer Fläche, siehe Fig. 28b, so denke man sich statt der Fläche das Polyeder, als dessen Grenze sie angesehen werden kann; alsdann sind ab, $b\gamma$ in zwei aufeinanderfolgenden Polyederflächen gezogen. Es ist der weitere Beweis dann so wie vorhin. Dreht man die eine Polyederfläche um die andere, so dass beide blos eine einzige bilden und $b\gamma$ etwa zu bc wird, so muss abc eine Gerade werden und die Ebene $b\gamma c$ ist ganz dieselbe als die Ebene $ab\gamma$; die Ebene γbc ist also zu gleicher Zeit Schmiegungsebene; die Ebene $b\gamma c$ ist aber normal auf der Ebene des festen Elements. Also gilt der Satz allgemein für alle Flächen.

Ist $ab\gamma$ keine kürzeste Linie der Fläche, und klappt man $b\gamma$ in die Ebene von ab herunter, so beschreibt $b\gamma$ eine Ebene normal zu der Horizontalebene, γbc steht also noch normal auf der Ebene 1. γbc ist jedoch in diesem Falle nicht mehr die Schmiegungsebene von abc, denn das Element bc ist nicht mehr die Verlängerung von ab. Unser Satz gilt also nur für die kürzesten Linien.

§ 89.

Beweis desselben Satzes durch Variationsrechnung. x, y, z seien gegeben als Functionen einer vierten Grösse t, durch deren Elimination man die Gleichung der Fläche $F(x, y, z) = 0$ erhalten muss. Durch diese Darstellungsart hat man zugleich eine Curve auf der Fläche bestimmt. Die Länge derselben wird gegeben durch das Integral

$$\int\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,.\,dt.$$

Nennt man den Werth des t, der dem Anfangspunkt A der Curve entspricht, α und einen zweiten Werth des t, der dem Punkt B der Curve entspricht, β, so ist unsre Aufgabe, das Integral

$$\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

zum Minimum zu machen.

Wir denken zwischen den Punkten A und B eine andere Curve gezogen, welche von der ersten sehr wenig abweicht: dann muss diese neue Curve länger sein als die erste. Wir werden diese zweite Curve, welche von der ersten sehr wenig abweicht, finden, wenn wir in der ersten statt x, y, z resp. $x + \varepsilon.\delta x$ $y + \varepsilon.\delta y$ $z + \varepsilon.\delta z$ setzen, wenn nämlich ε eine sehr kleine constante Grösse und δx δy δz ganz willkürliche Functionen von t sind. Sie sind nur zwei Bedingungen unterworfen: erstens muss die neue Curve ebenfalls durch A und B gehen, d. h. δx, δy, δz müssen einzeln Null sein für $t = \alpha$ und für $t = \beta$. Zweitens muss die neue Curve auch auf der Fläche liegen, d. h. es muss zweitens $F(x + \varepsilon\delta x,\ y + \varepsilon\delta y,\ z + \varepsilon\delta z) = 0$ sein. Demnach muss auch die Gleichung bestehen:

$$\frac{1}{\varepsilon}\left\{F(x+\varepsilon\delta x,\ y+\varepsilon\delta y,\ z+\varepsilon\delta z)-F(x, y, z)\right\}=0,$$

und zwar muss sie für jeden Werth von ε bestehen. Entwickelt man daher die Klammergrösse vermittelst des Taylor'schen Lehrsatzes nach Potenzen der Incremente $\varepsilon.\delta x$, $\varepsilon.\delta y$, $\varepsilon.\delta z$, führt dann

die Division mit ε aus, und setzt ε gleich Null, so hat man noch folgende Bedingungsgleichung für die Grössen δx, δy, δz:

$$P.\delta x + Q.\delta y + R.\delta z = 0.$$

Mit Beobachtung dieser Gleichungen muss also sein:

$$\int_\alpha^\beta dt \sqrt{\left(\frac{dx + \varepsilon.d\delta x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy + \varepsilon.d\delta y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz + \varepsilon.d\delta z}{dt}\right)^2}$$
$$> \int_\alpha^\beta dt \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

Dies ist aber der Fall, wenn links, nachdem man nach ε entwickelt hat, das mit ε multiplicirte Glied Null, das mit ε^2 multiplicirte positiv ist. Es ist nun

$$\sqrt{\left(\frac{dx + \varepsilon.d\delta x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy + \varepsilon.d\delta y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz + \varepsilon.d\delta z}{dt}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + 2\varepsilon\left\{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d\delta x}{dt} + \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d\delta y}{dt} + \frac{dz}{dt}\cdot\frac{d\delta z}{dt}\right\} + \cdots}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} + \varepsilon\frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d\delta x}{dt} + \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d\delta y}{dt} + \frac{dz}{dt}\cdot\frac{d\delta z}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} + \cdots$$

Wir haben demnach das Integral des Coefficienten von ε:

$$\int_\alpha^\beta \frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d\delta x}{dt} + \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d\delta y}{dt} + \frac{dz}{dt}\cdot\frac{d\delta z}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}\, dt = 0$$

zu setzen. Da nun

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \frac{ds}{dt}$$

ist, so können wir diese Gleichung so schreiben:

$$\int_\alpha^\beta \left\{\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d\delta x}{dt} + \frac{dy}{ds}\cdot\frac{d\delta y}{dt} + \frac{dz}{ds}\cdot\frac{d\delta z}{dt}\right\} dt = 0.$$

Zerlegen wir diese Summe, so haben wir zunächst

$$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{ds}\cdot\frac{d\delta x}{dt}.dt.$$

Dieses Integral können wir durch theilweise Integration auf folgende Form bringen:

$$\left\{\delta x.\frac{dx}{ds}\right\}_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \delta x.\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{dt}\,dt.$$

Das vom Integralzeichen freie Glied ist aber Null, weil $\delta x = 0$, wenn $t = {\alpha \atop \beta}$ ist. Demnach wird unsre vorige Gleichung:

$$\int_\alpha^\beta \left\{\delta x.\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{dt}\,dt + \delta y.\frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{dt}.dt + \delta z.\frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{dt}\,dt\right\} = 0,$$

worin man wiederum dt als gemeinschaftlichen Factor herausnehmen kann. Wären nun $\delta x\ \delta y\ \delta z$ ganz willkürlich, so könnte dieses Integral nur dann Null sein, wenn der Factor, mit welchem dt multiplicirt ist, Null wäre. Es besteht aber, wie wir oben gesehen haben, die Gleichung $P.\delta x + Q.\delta y + R.\delta z = 0$. Demnach kann das Integral nur dadurch Null werden, dass die Coefficienten der Grössen δx, δy, δz proportional sind den Quotienten P, Q, R; d. h. dass man die Gleichungen

$$\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{dt} = \lambda.F'(x) \quad \frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{dt} = \lambda.F'(y) \quad \frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{dt} = \lambda.F'(z)$$

hat, welche man auch so schreiben kann:

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \lambda.\frac{dt}{ds}.P \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \lambda.\frac{dt}{ds}.Q \quad \frac{d^2z}{ds^2} = \lambda.\frac{dt}{ds}.R.$$

Eliminirt man hieraus $\lambda.\frac{dt}{ds}$, so erhält man nur zwei Gleichungen, welche sich wiederum auf eine reduciren lassen. Denn multiplicirt man unsre drei Gleichungen der Reihe nach mit $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, so ergiebt sich identisch $0 = 0$. Also vertreten diese drei Gleichungen nur die Stelle von einer, und diese ist dieselbe, wie die, welche wir oben für die kürzesten Linien gefunden haben.

Ganz nach denselben Principien löst man folgende Aufgabe, siehe Fig. 29, welche in dasselbe Gebiet gehört: Wenn irgend eine Curve gegeben ist, die Fläche durchzulegen, welche den kleinsten Flächeninhalt hat. [Lagrange, miscellanea Taurinensia.] Wir können sie daher kurz ausführen. Lassen wir zunächst die Grenzen, welche sich nach der gegebenen Curve richten, unbestimmt, so ist unsre Aufgabe: den Ausdruck $\iint\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy$ zum Minimum zu machen. Wir setzen daher statt z $z + \varepsilon.\delta z$, indem wir statt der gesuchten Fläche eine neue bestimmen, welche aber der ersten sehr nahe ist. Dadurch wird p zu $p + \varepsilon.\frac{\partial\delta z}{\partial x}$ und q zu $q + \varepsilon.\frac{\partial\delta z}{\partial y}$. Also geht die $\sqrt{1+p^2+q^2}$

über in

$$\sqrt{1+p^2+q^2+2\varepsilon\left(p.\frac{\partial\delta z}{\partial x}+q.\frac{\partial\delta z}{\partial y}\right)+\cdots\cdots}$$

oder in

$$\sqrt{1+p^2+q^2}+\varepsilon.\frac{p.\frac{\partial\delta z}{\partial x}+q.\frac{\partial\delta z}{\partial y}}{\sqrt{1+p^2+q^2}}+\cdots\cdots$$

Setzen wir daher $\sqrt{1+p^2+q^2}=W$, so muss

$$\int\int\left(\frac{p.\frac{\partial\delta z}{\partial x}}{W}+\frac{q.\frac{\partial\delta z}{\partial y}}{W}\right)dx\,dy=0$$

sein, und zwar innerhalb derselben Grenzen, für welche $\int\int W\,dx\,dy$ ein Minimum sein soll. Es ist nun

$$\int\frac{p\frac{\partial\delta z}{\partial x}}{W}\,dx=\frac{p}{W}\,\delta z-\int\delta z.\frac{\partial\left(\frac{p}{W}\right)}{\partial x}\,dx$$

immer innerhalb derselben Grenzen. An diesen Grenzen ist δz Null, also haben wir die Gleichung

$$-\int\int\delta z.\frac{\partial\frac{p}{W}}{\partial x}\,dx\,dy-\int\int\delta z.\frac{\partial\frac{q}{W}}{\partial y}\,dx\,dy$$

oder

$$-\int\int\delta z.\left(\frac{\partial\frac{p}{W}}{\partial x}+\frac{\partial\frac{q}{W}}{\partial y}\right)dx\,dy=0.$$

Im übrigen Verlauf der Fläche (mit Ausnahme der Grenzen) ist aber δz ganz beliebig; also muss

$$\frac{\partial\frac{p}{W}}{\partial x}+\frac{\partial\frac{q}{W}}{\partial y}=0$$

sein. Die Flächen, welche dieser Gleichung genügen, lösen die Aufgabe. Um die Gleichung zu interpretiren, führen wir die Differentiation aus. Es ist

$$\frac{\partial\frac{p}{W}}{\partial x}=\frac{Wr-p\frac{pr+qs}{W}}{W^2}=\frac{r+p^2r+q^2r-p^2r-pqs}{W^3}=\frac{r(1+q^2)-pqs}{W^3}.$$

Also wird unsre Gleichung, wenn wir sie mit W^3 multipliciren:

$$r(1+q^2)-2pqs+t(1+p^2)=0,$$

d. h. bei den Flächen, welche diese Aufgabe lösen, ist (§ 50.) die Summe der Hauptkrümmungshalbmesser $=0$, oder die Hauptkrümmungen gleich und entgegengesetzt.

Ein interessantes Beispiel hierzu ist folgendes: Zwei Kreise liegen einander parallel so, siehe Fig. 30, dass ihre Mittelpunkte normal übereinander sind. Welches ist die kleinste Fläche, die man durch beide hindurchlegen kann? Zunächst ist soviel klar, dass es jedenfalls eine Umdrehungsfläche sein wird. Denn zieht man in beiden Kreisen zwei Paar paralleler Radien, und an einer beliebigen andern Stelle der Peripherie ebenfalls zwei Paar, welche denselben Winkel einfassen, so müssen die Streifen der gesuchten Fläche, welche durch die Ebenen ausgeschnitten werden, die man durch je zwei parallele Radien hindurchlegt,

einander gleich sein. Wäre der eine grösser als der andere, so könnte man, um an jener Stelle ein Minimum in dem verlangten Sinne herzustellen, wenigstens den andern Streifen an seine Stelle setzen. Wir können folglich die Gleichung der gesuchten Fläche in folgender Form schreiben: $z = f(\xi)$ $\xi^2 = x^2 + y^2$. Dann ist $p = f' . \frac{x}{\xi}$ $q = f' . \frac{y}{\xi}$, also $W = \sqrt{1 + f'^2}$. Setzen wir noch der Kürze halber $\frac{f'}{\xi . W} = L$, so wird unsre partielle Differentialgleichung folgende:

$$\frac{\partial (xL)}{\partial x} + \frac{\partial (yL)}{\partial y} = 0 \text{ oder } 2L + \left(x\frac{\partial \xi}{\partial x} + y\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\frac{\partial L}{\partial \xi} = 0 \text{ oder } 2L + \xi\frac{\partial L}{\partial \xi} = 0$$

oder $2\frac{\partial \xi}{\xi} + \frac{\partial L}{L} = 0$. Integrirt giebt diese Gleichung $2l\xi + lL + cst = 0$ oder in den Numeris $\xi^2 . L = a$ d. i. $\frac{\xi f'}{\sqrt{1 + f'^2}} = a$ oder $\xi^2 f'^2 = a^2 + a^2 f'^2$ d. i.

$$\xi^2 \left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2 = a^2 + a^2\left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2 \text{ oder } \frac{dz}{d\xi} = \frac{a}{\sqrt{\xi^2 - a^2}}$$

und durch Integration

$$z = a \int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - a^2}} = a . l \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - a^2}}{b},$$

wo $-a . lb$ die willkürliche Constante ist. Setzt man statt b $a . e^\alpha$, so wird unsre Gleichung

$$z = a . l \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - a^2}}{a . e^\alpha}$$

oder in der exponentiellen Gestalt

$$a . e^{\frac{z}{a} + \alpha} = \xi + \sqrt{\xi^2 - a^2}.$$

Daraus folgt sogleich

$$a . \frac{1}{e^{\frac{z}{a} + \alpha}} = \frac{a^2}{\xi + \sqrt{\xi^2 - a^2}} = \frac{a^2 (\xi - \sqrt{\xi^2 - a^2})}{\xi^2 - \xi^2 + a^2} \text{ oder } a . e^{-\frac{z}{a} - \alpha} = \xi - \sqrt{\xi^2 - a^2}.$$

Mithin wird

$$\xi = \frac{a}{2}\left\{e^{\frac{z}{a} + \alpha} + e^{-\frac{z}{a} - \alpha}\right\};$$

dies ist aber die Gleichung der Kettenlinie. Die kleinste Fläche also, welche genügt, ist entstanden durch Rotation einer Kettenlinie.

Die Integrationsconstanten a und α bestimmen sich durch die Entfernung der beiden Kreise und ihre Radien. Bisweilen giebt daher die Kettenlinie kein Minimum, sondern erstens den obern Kreis, zweitens den untern, drittens die Axe.

§ 90.

Excursus. Die kürzesten Linien finden eine häufige Anwendung in der Mechanik. Wir wollen davon zwei wichtige Beispiele anführen.

1) Wenn ein Punkt auf einer Fläche $F(x, y, z) = 0$ sich bewegt, und die Kräfte, welche dies bewirken, mit X, Y, Z bezeichnet werden, so sind bekanntlich die Differentialgleichungen der Bewegung folgende:

$$m.\frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda . F'(x) \quad m.\frac{d^2y}{dt^2} = Y + \lambda . F'(y) \quad m.\frac{d^2z}{dt^2} = Z + \lambda . F'(z).$$

Wirken aber auf den Punkt ausser einem ersten Impulse gar keine Kräfte, so sind X, Y, Z einzeln gleich Null, und die Differentialgleichungen der Bewegungen sind jetzt folgende:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda . P, \ \frac{d^2y}{dt^2} = \lambda . Q, \ \frac{d^2z}{dt^2} = \lambda . R$$

in den Bezeichnungen des § 40. λ ist das, was vorhin $\frac{\lambda}{m}$ war. Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit $\frac{2\,dx}{dt}, \frac{2\,dy}{dt}, \frac{2\,dz}{dt}$ und addirt sie alsdann, so kommt rechts 0, links das Differential von $\frac{ds^2}{dt^2}$ heraus. Man hat also durch Integration $ds = \alpha . dt$, wo α die Constante. Hiernach können wir dt eliminiren, und erhalten dadurch, wenn wir $\frac{\lambda}{\alpha^2} = \mu$ setzen:

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \mu . P \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \mu . Q \quad \frac{d^2z}{ds^2} = \mu . R.$$

Dies sind aber die Gleichungen der kürzesten Linie. Also haben wir den Lehrsatz:

Wenn ein Punkt gezwungen ist, sich auf einer Fläche zu bewegen, und keine beschleunigenden Kräfte auf ihn einwirken, so beschreibt er eine kürzeste Linie.

2) Ein zweiter Fall ist folgender: Wenn ein Faden auf einer Fläche gespannt wird, und auf den Faden weiter keine Kräfte wirken, also auch von seiner Schwere abstrahirt wird, so nimmt der Faden die Gestalt der kürzesten Linie an. Denn, bezeichnet T die Spannung, so bleibt das Element im Gleichgewicht durch folgende Kräfte:

$$X + T\frac{dx}{ds} - \left(T\frac{dx}{ds} + d\left(T\frac{dx}{ds}\right)\right) \text{ oder } X - d\left(T\frac{dx}{ds}\right)$$

und zwei ähnliche. Dazu kommt der Widerstand der Fläche in der Richtung der x Axe: $+\lambda F'(x)$ oder $+\lambda . P$. Fürs Gleichgewicht muss nun die Summe aller Componenten in einer Richtung Null sein; man hat also

$$X - d\left(T\frac{dx}{ds}\right) + \lambda P = 0 \quad Y - d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + \lambda Q = 0 \quad Z - d\left(T\frac{dz}{ds}\right) + \lambda R = 0.$$

Sind die Kräfte $X, Y, Z = 0$, so können wir, wenn wir λ statt $\frac{\lambda}{ds}$ schreiben, die Gleichungen so fassen:

$$\frac{d\left(T\frac{dx}{ds}\right)}{ds} = \lambda P \quad \frac{d\left(T\frac{dy}{ds}\right)}{ds} = \lambda Q \quad \frac{d\left(T\frac{dz}{ds}\right)}{ds} = \lambda R$$

oder durch Ausführung der Differentiation

$$\frac{dT}{ds}\frac{dx}{ds} + T\frac{d^2x}{ds^2} = \lambda P \quad \frac{dT}{ds}\frac{dy}{ds} + T\frac{d^2y}{ds^2} = \lambda Q \quad \frac{dT}{ds}\frac{dz}{ds} + T\frac{d^2z}{ds^2} = \lambda R.$$

Multipliciren wir diese drei Gleichungen der Reihe nach mit $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ und addiren, so entsteht: $\frac{dT}{ds}.1 + T.0 = \lambda.0$, oder $\frac{dT}{ds} = 0$, also $T = \alpha$. Setzen wir diesen Werth in die drei Gleichungen ein, so werden sie wiederum zu den Gleichungen der kürzesten Linie.

§ 91.

Aufgabe. Die kürzeste Linie auf allen Rotationsflächen zu finden.

Wir wenden hier die Gleichungen der kürzesten Linie in folgender Form an:

$$\begin{cases} d^2x + \lambda\, dx + \mu P = 0 \\ d^2y + \lambda\, dy + \mu Q = 0 \\ d^2z + \lambda\, dz + \mu R = 0 \end{cases},$$

welche sich leicht aus der Gleichung in Determinantenform ableiten lässt. Die allgemeine Gleichung der Rotationsfläche ist $z = f(\xi)$ $\xi^2 = x^2 + y^2$. Demnach wird $P = f'.\frac{\partial \xi}{\partial x} = f'.\frac{x}{\xi}$, $Q = f'.\frac{y}{\xi}$ und $R = -1$. Also werden unsre drei Gleichungen:

$$\begin{cases} d^2x + \lambda\, dx + \mu f'.\frac{x}{\xi} = 0 \\ d^2y + \lambda\, dy + \mu f'.\frac{y}{\xi} = 0 \\ d^2z + \lambda dz - \mu = 0 \end{cases}$$

Multipliciren wir sie der Reihe nach mit dx, dy, dz und addiren alsdann, so finden wir folgende Gleichung: $ds.d^2s + \lambda.ds^2 + \mu.0 = 0$ oder $d^2s + \lambda.ds = 0$. Elimininirt man μ dadurch, dass man die erste Gleichung mit y, die zweite mit x multiplicirt, und subtrahirt, so hat man folgende zweite Gleichung $y\,d^2x - x\,d^2y + \lambda(y\,dx - x\,dy) = 0$, d. i. wenn wir $y\,dx - x\,dy = N$ setzen: $dN + \lambda N = 0$. Eliminiren wir also λ, so finden wir $\frac{dN}{N} = \frac{d^2s}{ds}$, oder wie wir auch schreiben können $\frac{ds.dN - Nd^2s}{ds^2} = 0$. Diese Gleichung giebt integrirt $\frac{N}{ds} = \nu$, wo ν die Constante ist. Setzen wir für N und ds ihre Werthe zurück, so haben wir folgende Gleichung gefunden

$$y\,dx - x\,dy = \nu\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Diese Gleichung transformiren wir behufs der Integration. Nehmen

wir irgend einen Meridian zum nullten und nennen den Winkel, den ein andrer mit ihm bildet u, so können wir vermöge der Gleichung der Rotationsfläche schreiben $x = \xi \cos u$, $y = \xi \sin u$, $z = f(\xi)$. Danach verwandelt sich unsre Gleichung in folgende

$$-\xi^2 du = v\sqrt{d\xi^2 + \xi^2 du^2 + f'^2 d\xi^2} \text{ oder } du^2 \{\xi^4 - v^2\xi^2\} = v^2 d\xi^2 \{1 + f'^2\};$$

also können wir die Variabeln unmittelbar separiren, und haben somit die integrable Gleichung gefunden:

$$du = \frac{v\,d\xi}{\xi}\sqrt{\frac{1+f'^2}{\xi^2 - v^2}}.$$

Um die Grenzen ansetzen zu können, wollen wir bestimmen, dass für den nullten Meridian, wo $u = 0$ ist, der Radius des Parallelkreises, in welchem die kürzeste Linie den Meridian trifft, r_0 sei, und der des Parallelkreises, in welchem sie den Meridian, für welchen $u = u$ ist, trifft, r. Dann wird das Integral

$$u = v\int_{r_0}^{r}\frac{d\xi}{\xi}\sqrt{\frac{1+f'^2}{\xi^2 - v^2}}.$$

Die separirte Differentialgleichung $\xi^2 du = v\,ds$ hat einen einfachen geometrischen Sinn. Man denke sich zwei unendlich nahe Meridiane, siehe Fig. 31, deren Winkel also du ist, und einen Theil der kürzesten Linie ab, welcher zwischen ihnen liegt. Ferner sei ac das zwischen ihnen liegende Stück des Parallelkreises, der durch a geht. Dann ist $ac = \xi . du$, $ab = ds$. Ferner im rechtwinkligen Dreieck bac: $ac = ab . \cos bac = ab . \sin (M, ab) = ab . \sin i$. Also wird $\xi . du = ds \sin i$ und $\xi^2 du = \xi ds \sin i$ und $\xi \sin i = v$, also constant.

Zeichnet man z. B. bei der Kugel irgend zwei Meridiane M und M', siehe Fig. 32, und für sie die Radien ξ und ξ' und bestimmt die Winkel i und i', so hat man $\xi . \sin i = \xi' . \sin i'$. Es ist aber, wenn man die Stücke der Meridiane vom Pole bis zu der kürzesten Linie mit φ und φ' bezeichnet, $\xi = a \sin \varphi$, $\xi' = a \sin \varphi'$, wo a der Kugelradius ist; man hat somit folgende Gleichung: $\sin \varphi . \sin i = \sin \varphi' . \sin i'$; d. h. die kürzeste Linie auf der Kugel ist so beschaffen, dass, wenn man zwei Punkte in ihr mit dem Pole verbindet, die Sinus der Winkel, welche sie mit dem Meridian bildet, sich verhalten umgekehrt wie die Sinus der entsprechenden Poldistanzen. Das ist aber die Grundeigenschaft des grössten Kreises auf der Kugel.

Um die kürzeste Linie auf dem Umdrehungsellipsoid zu finden, schreiben wir die Gleichung der Meridianellipse in folgender Form: $\begin{cases}\xi = a . \cos v \\ z = b . \sin v\end{cases}$, siehe Fig. 33, also wird die Gleichung des Ellipsoids

folgende:

$$\begin{cases} x = a \cos v \cos u \\ y = a \cos v \sin u \, . \\ z = b \sin v \end{cases}$$

Dadurch wird unsre Differentialgleichung:

$$a^2 \cos^2 v . du = \nu \sqrt{a^2 \sin^2 v \, dv^2 + a^2 \cos^2 v \, du^2 + b^2 \cos^2 v \, dv^2}$$

also durch Quadrirung:

$$du^2 \left\{ a^4 \cos^4 v - \nu^2 a^2 \cos^2 v \right\} = \nu^2 dv^2 \left\{ a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v \right\}$$

und folglich

$$u = \frac{\nu}{a} \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{\cos v} \sqrt{\frac{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}{a^2 \cos^2 v - \nu^2}} \, ,$$

welches Integral sich auf eins der dritten Gattung zurückführen lässt.

§ 92.

Aufgabe. Die kürzesten Linien auf jedem Ellipsoid zu finden [zuerst von Jacobi gelöst].

Die Gleichung der kürzesten Linien kann man, auch im allerallgemeinsten Falle, von einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, durch Integration auf eine erster Ordnung zurückführen, indem man sie mit dem Ausdruck multiplicirt, welcher gleich Null gesetzt die Differentialgleichung der Krümmungscurven ist. Man erhält dadurch das Product der beiden Determinanten:

$$\begin{vmatrix} dx & d^2x & P \\ dy & d^2y & Q \\ dz & d^2z & R \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} dx & P & dP \\ dy & Q & dQ \\ dz & R & dR \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} dx^2 + dy^2 + dz^2 & dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z & dxP + dyQ + dzR \\ Pdx + Qdy + Rdz & Pd^2x + Qd^2y + Rd^2z & P^2 + Q^2 + R^2 \\ dPdx + dQdy + dRdz & dPd^2x + dQd^2y + dRd^2z & PdP + QdQ + RdR \end{vmatrix} .$$

Nun ist aber $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, ferner $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$, also $dx\, d^2x + dy\, d^2y + dz\, d^2z = ds\, d^2s$. Ferner hat man

$$dPdx + dQdy + dRdz + Pd^2x + Qd^2y + Rd^2z = 0,$$

also

$$Pd^2x + Qd^2y + Rd^2z = -(dPdx + dQdy + dRdz).$$

Setzt man endlich

$$P^2 + Q^2 + R^2 = H^2, \text{ also } PdP + QdQ + RdR = HdH,$$

so lässt sich die Determinante, die wir durch Multiplication der beiden gefunden haben, und die Null sein muss, weil jene Null

sind, jetzt folgendermassen schreiben, wenn wir noch drei ähnliche Glieder durch Σ andeuten:

$$\begin{vmatrix} ds^2 & ds.\,d^2s & 0 \\ 0 & -\Sigma(dP.\,dx) & H^2 \\ \Sigma(dPdx) & \Sigma(dP.\,d^2x) & HdH \end{vmatrix} = 0, \text{ d. i.}$$

$$-ds^2\left\{H.\,dH.\,\Sigma(dP.\,dx)+H^2.\,\Sigma(dP.\,d^2x)\right\}+ds.\,d^2s.\,H^2.\,\Sigma(dP.\,dx)=0.$$

Streichen wir zunächst noch den gemeinschaftlichen Factor $H.\,ds$ und dividiren ausserdem die Gleichung durch $H.\,ds.\,\Sigma(dP.\,dx)$, so wird die vorige Gleichung, welche somit sowohl für Krümmungscurven als auch für kürzeste Linien gilt:

$$-\frac{dH}{H}-\frac{\Sigma(dP.\,d^2x)}{\Sigma(dP.\,dx)}+\frac{d^2s}{ds}=0.$$

Diese Gleichung gilt allgemein für alle Flächen. Zwei der sie bildenden Brüche sind genaue Differentiale; der mittlere wird es auch für die Flächen zweiten Grades mit einem Mittelpunkte, die in der Gleichung $\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}+\frac{z^2}{\gamma}-1=0$ enthalten sind. Denkt man sich nämlich das Polynom durch 2 dividirt, so wird sein Differentialquotient partiell nach x oder $P=\frac{x}{\alpha}$, also $dP=\frac{dx}{\alpha}$; also wird hier

$$\frac{\Sigma(dP.\,d^2x)}{\Sigma(dP.\,dx)}=\frac{\frac{dx.\,d^2x}{\alpha}+\frac{dy.\,d^2y}{\beta}+\frac{dz.\,d^2z}{\gamma}}{\frac{dx^2}{\alpha}+\frac{dy^2}{\beta}+\frac{dz^2}{\gamma}}.$$

Hier ist der Zähler das genaue Differential des Nenners. Setzen wir den Nenner $=\lambda^2$, so wird der Zähler $\lambda.\,d\lambda$, also der Bruch $\frac{d\lambda}{\lambda}$, und wir haben somit folgende Differentialgleichung

$$-\frac{dH}{H}-\frac{d\lambda}{\lambda}+\frac{d^2s}{ds}=0.$$

Diese lässt sich sofort integriren. Sie giebt $\frac{H\lambda}{ds}=cst$; oder mit Zurücksetzung der Werthe:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=c.\,\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{\frac{dx^2}{\alpha}+\frac{dy^2}{\beta}+\frac{dz^2}{\gamma}}.$$

Diese Gleichung, welche nicht nur für das Ellipsoid, sondern für alle drei Flächen mit einem Mittelpunkt gilt, hat eine einfache geometrische Bedeutung. Nach § 50. ist ihre linke Seite das Quadrat des reciproken Werthes von p, der Entfernung vom Mittelpunkte der Fläche bis zur Tangentialebene in (x, y, z). Den Bruch rechts kann man, weil der Zähler ds^2 ist, so schreiben:

$$1 : \left(\frac{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2}{\alpha} + \frac{\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}{\beta} + \frac{\left(\frac{dz}{ds}\right)^2}{\gamma} \right);$$

d. i. wenn A, B, C die Winkel der Tangente eines Normalschnitts mit den drei Axen sind: $1 : \left(\frac{\cos^2 A}{\alpha} + \frac{\cos^2 B}{\beta} + \frac{\cos^2 C}{\gamma}\right)$. Deshalb wird der Bruch rechts, wie ebenfalls in § 50. dargethan worden ist, gleich dem Quadrate des Radius d, siehe Fig. 34, den man vom Mittelpunkte der Fläche aus der Tangente parallel bis zur Fläche zieht. Es ist somit $\frac{1}{p^2} = c.\, d^2$ oder $d.p = cst$; d. h. Zieht man eine kürzeste Linie auf einer Fläche zweiten Grades, die einen Mittelpunkt hat, und nennt d den Radius der Fläche, welcher der Tangente der Curve parallel ist, und p die Entfernung des Mittelpunktes der Fläche von der Tangentialebene desselben Punktes, so ist das Product dieser beiden Grössen constant. — Dieselbe Eigenschaft gilt auch für die Krümmungscurven.

Der Satz vom constanten Inhalt des Parallelogramms über je zwei conjugirten Durchmessern bei den Kegelschnitten mit einem Mittelpunkte entspricht diesem Satze von den Flächen, wie man aus der Figur ersieht: denn d ist hier die halbe Grundlinie, p die halbe Höhe eines solchen Parallelogramms.

Es folgt noch: Für die Krümmungscurven gelten folgende Gleichungen:

1) Die so eben gefundene $d.p = cst$, in welcher nur die ersten Differentiale dx, dy, dz enthalten sind, und welche 2) der Gleichung $\frac{x}{\alpha}.dx + \frac{y}{\beta}.dy + \frac{z}{\gamma}.dz = 0$ unterliegen, weil x, y, z ein Punkt der Fläche sein soll, und 3) der Gleichung der Krümmungscurven

$$\begin{vmatrix} dx & \frac{dx}{\alpha} & \frac{x}{\alpha} \\ dy & \frac{dy}{\beta} & \frac{y}{\beta} \\ dz & \frac{dz}{\gamma} & \frac{z}{\gamma} \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\alpha dx\,(y dz - z dy) + \beta dy\,(z dx - x dz) + \gamma dz\,(x dy - y dx) = 0.$$

Man kann aus den beiden letzten Gleichungen das Verhältnis der Grössen $dx\; dy\; dz$, d. h. die Richtungen der Krümmungscurven bestimmen. Aus allen drei Gleichungen kann man die Verhältnisse von dx, dy, dz vollständig eliminiren, und erhält dadurch die endliche, integrirte Gleichung der Krümmungscurven.

Bei den kürzesten Linien dagegen haben wir zwar auch noch die beiden Gleichungen, welche wir vorhin mit 1) und 2) bezeich-

neten. An die Stelle der Gleichung 3) tritt aber eine Differentialgleichung, welche auch die zweiten Differentiale d^2x, d^2y, d^2z enthält, nämlich die der kürzesten Linien. Hier ist also die Aufgabe nicht bestimmt, wenn man durch irgend einen Punkt die kürzesten Linien ziehen soll, sondern man kann nach allen beliebigen Richtungen herum kürzeste Linien ziehen.

Obwohl also die Gleichung $d.p =$ const. für beide Arten Curven gilt, sind sie doch wesentlich von einander verschieden.

Zum Schluss geben wir noch den Weg an, auf welchem man zur Separation der in der gefundenen Differentialgleichung

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = C. \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} + \frac{dz^2}{c^2}}$$

enthaltenen Variabeln und demnach zur vollständigen Integration gelangt. Führt man die elliptischen Coordinaten ein,

$$x = a \sin u \Delta' \quad y = b \cos u \cos v \quad z = c \sin v \Delta,$$

wo $\Delta' = \sqrt{1 - \lambda'^2 \sin^2 v}$ und $\Delta = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}$, ferner

$$\lambda^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} \text{ und } \lambda'^2 = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}$$

ist, so erhält man, wenn man noch folgende Abkürzungen gebraucht $L = \lambda^2 \cos^2 u + \lambda'^2 \cos^2 v$, $U = a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u$, $V = c^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v$, ähnlich wie in § 82.

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = L \left\{ \frac{U}{\Delta^2} du^2 + \frac{V}{\Delta'^2} dv^2 \right\},$$

$$\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} + \frac{dz^2}{c^2} = L \left\{ \frac{1}{\Delta^2} du^2 + \frac{1}{\Delta'^2} dv^2 \right\}$$

und

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{U.V}{a^2 b^2 c^2}.$$

Also wird die zu integrirende Gleichung, wenn wir statt $a^2 b^2 c^2 C$ blos die Constante C setzen:

$$U.V = C. \frac{\frac{U}{\Delta^2} du^2 + \frac{V}{\Delta'^2} dv^2}{\frac{1}{\Delta^2} du^2 + \frac{1}{\Delta'^2} dv^2}$$

oder wenn man ordnet

$$\frac{du^2}{\Delta^2} \left\{ UV - CU \right\} + \frac{dv^2}{\Delta'^2} \left\{ UV - CV \right\} = 0$$

oder

$$\frac{U du^2}{(U - C) \Delta^2} + \frac{V dv^2}{(V - C) \Delta'^2} = 0,$$

worin die Variabeln getrennt sind. Für die Constante C bemerkt

man, dass sie zwischen U und V liegen muss; da nun der grösste Werth von U a^2, der kleinste von V c^2 ist, so muss C zwischen a^2 und c^2 liegen. Durch Integration erhalten wir also folgende Gleichung der kürzesten Linien auf einem dreiaxigen Ellipsoide:

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 u}} \sqrt{\frac{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u}{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u - C}}$$
$$= \pm \int \frac{dv}{\sqrt{1-\lambda'^2 \sin^2 v}} \sqrt{\frac{c^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v}{C - c^2 \cos^2 v - b^2 \sin^2 v}} + C'.$$

Es sind dies im Allgemeinen Abel'sche Integrale. Sie werden elliptische, wenn $C = b^2$ ist.

§ 93.

Lehrsatz. Wenn man von irgend einem Punkte L des Ellipsoids nach zwei Nabelpunkten F und F' kürzeste Linien zieht, und durch L die beiden Haupttangenten legt, so bilden die kürzesten Linien mit den Haupttangenten gleiche Winkel.

Beweis. Die kürzeste Linie LF, siehe Fig. 35a. b, hat die Eigenschaft, dass das Product $d.p$ in dem ganzen Laufe dieser Linie constant ist. Dieselbe Eigenschaft kommt auch der Linie LF' zu. Da nun aber die Nabelpunkte symmetrisch in dem Hauptschnitt der grössten und kleinsten Axe liegen, so ist die Entfernung der Tangentialebene vom Mittelpunkte für alle diese vier Nabelpunkte constant. Ferner ist der Durchmesser, welcher der Tangente in F parallel ist, der Durchmesser eines Kreisschnitts, d. h. gleich der mittlern Axe $2b$; und ebenso der, welcher der Tangente in F' parallel ist. Somit ist für beide Punkte F und F' das Product $d.p$ constant, demnach ist $d.p$ constant im Laufe der ganzen gebrochenen Linie FLF'.

Wir ziehen nun in L vier Tangenten: die beiden Haupttangenten, 1, 2 und die Tangenten an LF und LF', 3 und 4. Zu diesen vier Tangenten denken wir uns vier Durchmesser parallel gezogen: d_1 d_2 d_3 d_4. Diese liegen erstens in einer Diametralebene, weil die vier Tangenten in der Tangentialebene liegen; d_1 und d_2 sind die Hauptaxen des Diametralschnitts; die beiden Durchmesser d_3 und d_4 müssen einander gleich sein, weil sie es sind, wenn man sie mit der Entfernung der Tangentialebene vom Mittelpunkte multiplicirt; also sind d_3 und d_4 die gleich grossen Durchmesser des Diametralschnitts, und somit gegen die Axen d_1 und d_3 gleich geneigt. Dasselbe Verhältnis muss unter den ihnen parallelen Tangenten bestehen: die Tangenten 3 und 4 müssen folglich mit den Tangenten der Krümmungscurven 1 und 2 gleiche Winkel bilden. —

Wir können nun hieraus einen Satz ableiten, welcher dem von

den Kegelschnitten analog ist, dass die Summe resp. Differenz der Radienvectoren constant ist. Wir beweisen zunächst den Satz in der Ebene, welcher sich darauf stützt, dass der Kreis seine Radien rechtwinklig schneidet, und erweisen alsdann einen Lehrsatz von Gauss, welcher diesem vom Kreise analog ist.

§ 94.

Lehrsatz 1. Wenn man bei einer Ellipse nach einem Punkte der Peripherie Radienvectoren zieht, so bilden sie mit der Tangente dort gleiche Winkel.

Sind f und f', siehe Fig. 36, die beiden Brennpunkte der Ellipse und a ein Punkt in ihrer Peripherie, b der ihm unmittelbar nächste, so ist nach dem Grundgesetz der Ellipse: $fa + f'a = fb + f'b$. Trägt man daher fa auf fb bis nach α, und $f'b$ auf $f'a$ bis nach β ab, so ist auch $a\beta = b\alpha$. Ferner hat man in den beiden Dreiecken $a\beta b$ und $a\alpha b$ die Linie ab gemeinschaftlich, und endlich ist $< a\beta b = a\alpha b = R$, weil der Radius den Kreis rechtwinklig schneidet, oder weil, wenn man von einem Punkte Strahlen zieht, welche gleichlang sind, die Curve, welche die Endpunkte der Strahlen verbindet, normal auf den Strahlen steht. Demnach bildet ab denselben Winkel mit af' wie mit bf, und da Punkt b unendlich nahe an Punkt a liegt, also die Winkel, welche ab mit af und bf bildet, einander gleich sind, so bildet die Linie ab, oder die Tangente in a mit beiden Strahlen gleiche Winkel.

Lehrsatz 2. (Umkehrung.) Zieht man von zwei Punkten innerhalb einer Curve nach einem Punkte der Curve Strahlen, und bilden diese mit der Tangente dort gleiche Winkel, so ist die Summe der Strahlen constant.

Der Beweis ist der vorige in umgekehrter Ordnung. Sind a und b zwei unendlich nahe Punkte der Curve, und ist $\sphericalangle(ba, af)$ oder $\sphericalangle(ba, bf) = (ab, af')$, so ist in den rechtwinkligen Dreiecken $a\beta b$ und $a\alpha b$ $a\beta = b\alpha$, folglich auch $fa + f'a = fb + f'b = cst.$

Anmerkung. Derselbe Satz und seine Umkehrung gilt auch m. m. von der Hyperbel, siehe Fig. 37, d. h. wo es sich um constante Differenz der Strahlen handelt. Der Beweis ist ganz analog dem hier gegebenen. — Dieselbe Betrachtung giebt auch den Beweis für folgenden Satz: Legt man um eine Curve einen Faden und spannt ihn, so beschreibt seine Spitze eine Curve, deren Tangente mit den Radienvectoren gleiche Winkel bildet. Ebenso für die Umkehrung: Wenn zwei Curven in der Beziehung zu einander stehen, siehe Fig. 38, dass die Tangenten von einem Punkt der äussern nach Punkten der

innern mit der Tangente in jenem Punkt der äussern gleiche Winkel bilden, so ist folgende Summe constant: erster Radiusvector plus Bogenstück der zweiten Curve plus zweiter Radiusvector.

Der Satz gilt z. B. von zwei confocalen Ellipsen.

§ 95.

Lemma. Wenn man von einem Punkte einer Fläche nach allen Richtungen hin gleich grosse kürzeste Linien zieht, so stehen dieselben auf der Curve ihrer Endpunkte normal.

Beweis. 1) Wir denken uns von einem Punkte O der Fläche aus einander unendlich nahe, siehe Fig. 39, zwei kürzeste Linien von gleicher Länge gezogen: OA und OB; dann soll die Linie AB auf jedem dieser beiden Radien normal stehen. Angenommen, dies sei nicht der Fall, so wird z. B. der Winkel bei A ein spitzer sein, der bei B stumpf. Denken wir uns jetzt auf OA von A aus ein Stück AC abgetragen, so dass $AC = \frac{AB}{\cos A}$, also der Winkel $CBA = R$ ist, wenn man die kürzeste Linie CB zieht, so ist, weil AB, AC, CB unendlich kleine Grössen sind, $CB = AC.\sin A$, also

$$OC + CB = OA - AC + CB = OB - AC(1 - \sin A);$$

es wäre somit der Weg $OCB < OB$, d. h. OB keine kürzeste Linie. Diese Construction ist aber nur möglich, so lange A von 90^0 verschieden ist; da sie einen Widerspruch ergiebt, so muss $A = 90^0$ sein.

2) Der analytische Beweis stellt sich so: Denkt man sich von einem Punkt aus nach allen Richtungen hin beliebige Linien gezogen, nicht blos kürzeste, und auf denselben von dem Punkte aus eine Strecke u abgetragen, so wird offenbar der Winkel, den die Curve der Endpunkte dieser u mit den Strahlen macht, sehr verschieden sein können von einem rechten Winkel. Denkt man sich nun die Strecke u immer kleiner werdend, aber auf allen Curven gleich gross, so zieht sich die Curve, die ihre Endpunkte verbindet, immer mehr zusammen. Wird u unendlich klein, so kann man alle Endpunkte ansehen als in derselben Ebene liegend mit dem Punkte, von dem man ausgegangen ist; sie bilden folglich alsdann einen unendlich kleinen Kreis, und dieser steht somit normal auf allen Strahlen. — Hat man also von einem Punkte O einer Fläche nach allen Richtungen hin, also unzählige viele kürzeste Linien gezogon, und nimmt irgend eine unter ihnen als die erste an, so wird jede andere gegeben sein, wenn man weiss, welchen Winkel v im Anfange bei O ihre Tangente mit der Tangente der ersten bildet.

Nennt man ferner die Länge einer solchen kürzesten Linie vom Punkte O aus bis zu einem Punkte auf ihr gerechnet u, so kann offenbar jeder Punkt der Fläche gegeben werden durch die beiden Grössen u und v; d. h. man kann seine drei rechtwinkligen Coordinaten x, y, z jede als Function von u und v darstellen. In diesem Coordinatensystem wollen wir nun die Gleichung der kürzesten Linien für Punkt O aufstellen, d. h. die Frage lösen: Welche Functionen müssen x, y, z von u und v sein, oder wie müssen diese Functionen beschaffen sein, damit diejenigen Curven, für welche v constant ist, u aber variabel, kürzeste Linien sind? Damit eine Curve kürzeste Linie ist, muss ihre Schmiegungsebene normal stehen auf der Tangentialebene der Fläche. Die Tangentialebene der Fläche hat die Gleichung

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)(\zeta-z)+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right)(\xi-x)+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)(\eta-y)=0.$$

Die Schmiegungsebene derjenigen Curve, für welche v constant ist, u aber variabel, ist

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}-\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)(\zeta-z)+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\right)(\xi-x)$$
$$+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}-\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right)(\eta-y)=0.$$

Diese beiden Flächen schneiden sich rechtwinklig, wenn

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}-\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\right)$$
$$+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}-\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right)=0 \text{ ist.}$$

Dieses Aggregat von Producten lässt sich in folgenden Ausdruck transformiren:

$$\left\{\frac{\partial x^2}{\partial u^2}+\frac{\partial y^2}{\partial u^2}+\frac{\partial z^2}{\partial u^2}\right\}\left\{\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right\}$$
$$-\left\{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right\}\left\{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right\}=0$$

d. i.:

$$E.\left\{\frac{\partial F}{\partial u}-\tfrac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right\}-F.\tfrac{1}{2}.\frac{\partial E}{\partial u}=0.$$

Es ist aber

$$E=\frac{\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2}{\partial u^2}=\frac{du^2}{du^2}=1,$$

denn du ist das Bogenelement der Curven U, um die es sich hier handelt. Dadurch wird unsre Gleichung folgende: $\frac{\partial F}{\partial u}=0$ oder, einmal integrirt: F eine Function von v allein.

Hieraus und aus der zu Anfang dieses zweiten Beweises ange-

führten geometrischen Hilfsbetrachtung ergiebt sich unser Lehrsatz sofort. Die Grösse $\frac{F}{\sqrt{E.G}}$ bedeutet den Cosinus des Winkels zwischen den Curven U und V. Nehmen wir für alle Curven U, d. h. für alle kürzesten Linien, u constant, so erhalten wir die Curve V, welche die Endpunkte aller dieser gleichlangen kürzesten Linien verbindet. Lassen wir das u immer kleiner werden, so wird der Winkel dieser Endpunktencurve mit den kürzesten Linien schliesslich 90^0, wie wir wissen; also sein Cosinus gleich Null. Es muss mithin, je kleiner u wird, desto mehr F sich der Null nähern, und wenn u unendlich klein ist, muss $F = 0$ sein. In F kommt aber u gar nicht vor; deshalb muss F unter allen Umständen gleich Null sein; also steht die Endpunktencurve stets auf allen kürzesten Linien normal, u mag so gross sein als man will, wenn es nur für alle kürzesten Linien dasselbe ist.

Anmerkung. Dieser Beweis giebt sofort noch einen Satz, von welchem der eben bewiesene ein specieller Fall ist. Denkt man sich nämlich auf einer Fläche irgend eine Curve gezogen und eine Anzahl kürzester Linien, die darauf normal stehen, und auf allen diesen kürzesten Linien von der ersten Curve aus, die zum V Systeme gehören möge, gleiche Längen aufgetragen, so erhält man eine neue Curve, für welche man auf dieselbe Art beweisen kann, dass $\frac{\partial F}{\partial u} = 0$ ist oder F nur von v abhängt. Da aber für die erste Curve nach dem eben bewiesenen Lemma $F = 0$ ist, so findet diese Gleichung auch für die neuen Curven statt, und wir erhalten somit folgenden umfassenderen Satz:

Zieht man eine beliebige Curve auf einer Fläche und errichtet auf derselben geodätische Normalen von gleicher Länge, so liegen die Endpunkte dieser Normalen auf einer Curve, die alle Normalen rechtwinklig schneidet.

Dass das oben bewiesene Lemma nur ein specieller Fall hiervon ist, geht daraus hervor, dass der Punkt, von welchem wir oben ausgingen, als Degeneration jeder geschlossenen Curve angesehen werden kann.

§ 96.

Hiernach lässt sich folgender Lehrsatz beweisen: Wenn man auf einer Fläche um zwei Punkte als feste einen Faden sich gelegt denkt, den man stets gespannt hält, wodurch er (§ 90., 2) die Gestalt der kürzesten Linie annimmt, so bilden die Radienvectoren immer gleiche Winkel mit der entstehenden Curve. Oder, was genau dasselbe ist: Bestimmt man den Ort eines Punktes auf der

Fläche, so dass die Summe seiner kürzesten Entfernungen von zwei festen Punkten f und f' der Fläche constant bleibt, so bilden diese Entfernungen oder geodätischen Radienvectoren mit der Tangente der Curve stets gleiche Winkel. Ebenso, wenn die Differenz der Radienvectoren constant ist. Die Construction und der Beweis ist genau so wie für § 94., Lehrsatz 1. Die vier Punkte, welche hier den Punkten a, b, α, β dort entsprechen, liegen auch hier in einer Ebene, weil sie einander unendlich nahe sind; und auch hier sind nach dem Gauss'schen Satze $a\beta b$ und $a\alpha b$ rechte Winkel, mithin ändert sich gar nichts im Beweise.

Auch gilt hier der umgekehrte Lehrsatz, wie von selbst klar ist.

Folgerung [von Michael Roberts]. Die Krümmungscurven des Ellipsoids sind der geometrische Ort für einen Punkt, dessen Entfernungen von zwei Nabelpunkten durch kürzeste Linien gemessen eine constante Summe haben. Denn nach § 94. ist $\sphericalangle(3, 1) = (4, 1)$ und $\sphericalangle(3, 2) = (4, 2)$, mithin ist, wie eben bewiesen, $LF + LF' = c$.

§ 97.

Gauss hat sich mit dem Coordinatensystem, welches sich auf § 95. gründet, noch etwas genauer beschäftigt. Es ist folgendes: Man lege durch irgend einen Punkt O auf einer Fläche, s. Fig. 40, unzählig viele kürzeste Linien nach allen Richtungen. u sei die Entfernung irgend eines Punktes auf der Oberfläche von O; es wird also u angesehen werden können als die eine Coordinate, indem alle Punkte, welche gleiches u haben, auf einer Curve liegen, die auf allen Curven des ersten Systems normal steht. Betrachtet man eine beliebige Curve des ersten Systems z. B. OA als erste, so wird jeder Punkt C der Fläche vollständig gegeben sein, wenn erstens sein u, d. h. die geodätische Entfernung OC bekannt ist, und ausserdem der Winkel v, welchen OC in O mit der ersten Curve OA macht.

Es ist dieses Coordinatensystem ganz analog den Polarcoordinaten in der Ebene. — Wäre O der Pol der Erde, so wären u die Poldistanzen und v die geographischen Längen.

In diesem Coordinatensystem ist also für die Curven des ersten Systems v constant, für die des zweiten u. Die Grösse F ist $= 0$, weil die beiden Systeme aufeinander normal stehen.

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

wird $= 1$, denn u ist s. Die Grösse G endlich oder $\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$

wollen wir $= m^2$ setzen, so dass also m^2 eine Function von u und v ist. Demnach wird das Linienelement irgend einer Curve auf dieser Oberfläche $ds = \sqrt{u'^2 + m^2}\, dv$ also $ds^2 = du^2 + m^2 dv^2$, was auch aus dem rechtwinkligen Dreieck folgt, dessen Katheten du und mdv, nämlich die Differentiale der Curven des ersten und des zweiten Systems, und dessen Hypotenuse ds ist.

Wir wollen nun zunächst sehen, wie der Ausdruck für das Mass der Krümmung wird, welches wir durch k bezeichnen wollen, und welches (§ 63.) durch die Gleichung $k = \frac{1}{\varrho_1 \cdot \varrho_2}$ gegeben wird. Wir finden, weil $E = 1$, $F = 0$ ist, nach § 61.:

$$\varrho_1 \varrho_2 = \frac{4G^2}{\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2 - 2G\left(\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right)}.$$

Setzen wir also $G = m^2$, so wird

$$\frac{\partial G}{\partial u} = 2m\frac{\partial m}{\partial u} \text{ und } \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} = 2m\frac{\partial^2 m}{\partial u^2} + 2\left(\frac{\partial m}{\partial u}\right)^2.$$

Demnach wird der vorige Ausdruck zu folgendem einfacheren

$$\varrho_1 \varrho_2 = -\frac{m}{\frac{\partial^2 m}{\partial u^2}},$$

also endlich $k = -\frac{1}{m}\frac{\partial^2 m}{\partial u^2}$. Dies ist also das Mass der Krümmung in diesen Coordinaten.

Ueber die Grösse m wollen wir noch bemerken, dass für $u = 0$ unabhängig von v $m = 0$ und $\frac{\partial m}{\partial u} = 1$ wird. Denn es ist mdv das Bogenelement einer Curve des zweiten Systemes, und dieses wird einerseits Null für ein sehr kleines u; andrerseits kann man es für ein sehr kleines u auch geradezu gleich udv setzen, so dass also mdv gleich udv wird, wenn u sehr klein ist, also $\partial m = \partial u$ oder $\frac{\partial m}{\partial u} = 1$.

§ 98.

Aufgabe (Gauss). Welches ist die Gleichung der kürzesten Linie zwischen zwei gegebenen Punkten auf einer Oberfläche, ausgedrückt durch die krummlinigen Coordinaten u und v?

Nach dem vorigen Paragraph handelt es sich bei dieser Aufgabe darum, das Integral $\int \sqrt{u'^2 + m^2}\, dv$ innerhalb gegebener Grenzen zum Minimum zu machen. Wir setzen daher statt u $u + \varepsilon . \delta u$, also statt u' $u' + \varepsilon . (\delta u)'$, entwickeln alsdann das Integral nach Potenzen von ε, und setzen endlich das mit ε multiplicirte Glied:

$$\int \left\{ \frac{u'}{\sqrt{u'^2 + m^2}} (\delta u)' + \frac{m \frac{\partial m}{\partial u} \delta u}{\sqrt{u'^2 + m^2}} \right\} dv,$$

innerhalb derselben Grenzen genommen, gleich Null. Der erste Theil dieses Integrals lässt sich aber theilweis integriren, und berücksichtigt man, dass δu an den Grenzen Null sein muss, so erhält man folgende Gleichung aus der vorigen:

$$-\int \delta u \left\{ \left(\frac{u'}{\sqrt{u'^2 + m^2}} \right)' - \frac{m \frac{\partial m}{\partial u}}{\sqrt{u'^2 + m^2}} \right\} dv = 0.$$

Daraus folgt, weil diese Gleichung für alle Werthe von δu stattfinden muss, diese Differentialgleichung für die kürzesten Linien

$$\frac{m \frac{\partial m}{\partial u}}{\sqrt{u'^2 + m^2}} - \left(\frac{u'}{\sqrt{u'^2 + m^2}} \right)' = 0.$$

Anstatt dieser Differentialgleichung der zweiten Ordnung hat Gauss zwei der ersten Ordnung eingeführt und zwar vermittelst einer neuen Hilfsgrösse, die sich allerdings von selbst darbietet. LL sei irgend eine Curve auf der Fläche, siehe Fig. 41; ihr Bogen von irgend einem Punkte an gerechnet sei s, und zwar werde dieser Bogen so gerechnet, dass er mit wachsendem u ebenfalls zunimmt. Der Winkel v, welchen die u nach den verschiedenen Punkten von LL gezogen mit OA, dem ersten u, bilden, werde ebenfalls in der Richtung gezählt, dass er zunimmt, wenn u grösser wird. Alsdann werden die einzelnen Punkte der Curve LL unzweideutig durch eine Gleichung zwischen u und v gegeben sein. Nun sei ϑ der Winkel, welchen das Bogenelement der Curve LL mit dem Bogenelemente des ersten Systems, des Systems U, macht und zwar so genommen, dass seine Schenkel s und u wachsen. Man hat alsdann folgende Gleichungen:

$$\frac{m\,dv}{du} = \operatorname{tg} \vartheta, \quad \frac{du}{ds} = \cos \vartheta, \quad \frac{m\,dv}{ds} = \sin \vartheta,$$

welche somit für alle Curven LL gelten, sie mögen kürzeste Linien sein oder nicht.

Mit Hilfe dieses Winkels lässt sich nun die Gleichung der kürzesten Linie, welche wir auch so schreiben können:

$$\frac{m \frac{\partial m}{\partial u}}{\frac{ds}{dv}} - \left(\frac{\frac{du}{dv}}{\frac{ds}{dv}} \right)' \quad \text{oder} \quad \frac{m \frac{\partial m}{\partial u}}{\frac{ds}{dv}} - \left(\frac{du}{ds} \right)' = 0,$$

in folgende umformen:

$$\frac{m\frac{\partial m}{\partial u}}{\frac{ds}{dv}} - (\cos\vartheta)' = 0 \text{ oder } \frac{m\frac{\partial m}{\partial u}}{\frac{ds}{dv}} + \sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dv} = 0$$

oder endlich $\frac{\partial m}{\partial u} + \frac{d\vartheta}{dv} = 0$. Diese Gleichung gilt also speciell für die Veränderungen des ϑ bei den kürzesten Linien. Setzt man statt ϑ in sie den Werth desselben aus einer der obigen drei allgemeinen Gleichungen, so kommt man wieder auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung.

§ 99.

Mit Hilfe dieser Formeln lässt sich nun ein neuer Satz von Gauss beweisen, der einer der schönsten in der ganzen Theorie der Flächen ist. Wir schicken dazu voraus folgende

Erklärung. Es sei ein Dreieck auf einer Fläche gegeben, dessen Seiten kürzeste Linien sind. Man denke sich entlang dieses Dreiecks Normalen der Fläche gezogen, und zu diesen Normalen Radien einer Hilfskugel parallel, die von beliebiger Grösse ist. Man erhält dadurch auf der Kugel wiederum ein Dreieck, welches allerdings nur in dem speciellen Falle ein sogenanntes sphärisches Dreieck sein wird, dass die Fläche, von der man ausgeht, selbst eine Kugel ist. Den Inhalt des Dreiecks auf der Kugel nennt Gauss die curvatura integra oder Totalkrümmung des Dreiecks auf der gegebenen Fläche. Sind die drei Winkel des Dreiecks auf der gegebenen Fläche, d. h. die Winkel, welche die begrenzenden kürzesten Linien in den Durchschnittspunkten mit einander machen, A, B, C, so nennt man die Differenz $A + B + C - 180^0$ den sphärischen Excess und, falls diese Differenz negativ ist, die Differenz $180^0 - (A + B + C)$ den sphärischen Defect.

Lehrsatz. Die Totalkrümmung eines Dreiecks, das von kürzesten Linien auf einer Oberfläche gebildet wird, verhält sich zur Oberfläche einer Kugel, wie der sphärische Excess resp. Defect seiner Winkel zu 8 Rechten.

Beweis. Nach § 63. ist, wenn σ und s, s. Fig. 42, die dort angegebene Bedeutung haben, der Quotient $\frac{\sigma}{s} = \frac{1}{\varrho_1 \cdot \varrho_2}$. Offenbar ist die Totalkrümmung des Dreiecks ABC gleich $\Sigma\sigma$ innerhalb gewisser Grenzen, die sich nach den Seiten von ABC richten werden. Es ist also Curv. int. $= \Sigma\frac{s}{\varrho_1 \cdot \varrho_2}$. Denken wir uns nun eine Spitze des Dreiecks z. B. A als Anfangspunkt eines Coordinatensystems, wie wir es jetzt zuletzt betrachtet haben, so werden wir die beiden Seiten AB und AC als zwei Curven des Systems U ansehen können, wo v

constant ist. Denken wir uns nun zwei unendlich nahe Curven dieses Systems und zwei unendlich nahe Curven des zweiten Systems, für welches u constant ist, so werden diese ein kleines Rechteck ausschneiden, welches wir (wie in § 85.) als Differential, und zwar als zweites, von ABC ansehen können. Seine Seiten sind dv und $m.du$; wir erhalten demnach $s = m.du \cdot dv$, und haben folglich den Ausdruck $\frac{m.du.dv}{\varrho_1 \cdot \varrho_2}$ in Bezug auf u und v für alle Werthe zu integriren, die innerhalb des gegebenen Dreiecks fallen. Dies gelingt vermöge der Gleichung $\frac{1}{\varrho_1 \cdot \varrho_2} = k = -\frac{1}{m} \cdot \frac{\partial^2 m}{\partial u^2}$, wo $m^2 = G$ ist. Unser Integral wird also

$$\Sigma\sigma = \int\int -\frac{\partial^2 m}{\partial u^2}\, du\, dv.$$

Wir führen zunächst die Integration in Bezug auf u aus, d. h. wir berechnen die Totalkrümmung für den unendlich schmalen Streifen, der zwischen den beiden unendlich nahen Curven U liegt. Diese Integration ergiebt

$$\Sigma\sigma = \int \left(c - \frac{\partial m}{\partial u}\right) dv.$$

Die Grenzen für u sind 0 und der Werth, den es auf der Linie BC hat, und der eine Function von v ist. Da nun für $u = 0$ das Dreieck ABC zum Punkte A zusammenschrumpft, und folglich um so mehr unser unendlich kleines Dreieck, so ist für $u = 0$ $c - \frac{\partial m}{\partial u} = 0$. Da aber für $u = 0$ nach § 97. $\frac{\partial m}{\partial u} = 1$ ist, so wird die Constante $c = 1$. Also wird

$$\Sigma\sigma = \int \left(1 - \frac{\partial m}{\partial u}\right) dv,$$

oder mit Einführung des Winkels ϑ, den die Linien des Systems V mit denen des Systems U in dem im § 98. angegebenen Sinne bilden,

$$\Sigma\sigma = \int \left(1 + \frac{d\vartheta}{dv}\right) dv = \int dv + \int d\vartheta.$$

Das $\int dv$ ist offenbar A, wenn man die Grenzen für v einsetzt, welche 0 und A sind. Setzt man ferner den Winkel, welchen BC mit einer Curve U bildet, immer in dem angegebenen Sinne, gleich ϑ_0, und den mit der nächsten Curve U gleich ϑ_1, so ist $d\vartheta$ offenbar $= \vartheta_1 - \vartheta_0$. Das $\int d\vartheta$ wird also die Summe aller ähnlichen Differenzen, aus welcher sich folglich alle zwischenliegenden Winkel ausser dem ersten und letzten herausheben. Bezeichnet man diese resp. mit β und γ, so wird folglich $\int d\vartheta = \gamma - \beta$ d. i. $= C - (180^0 - B) \doteq B + C - 180^0$. Somit haben wir endlich: der Flächeninhalt der Totalkrümmung ist Curv. int. $= A + B + C - \pi$, wenn der Radius der Hilfskugel 1

ist. Dann ist aber die Oberfläche der Kugel $= 4\pi$. Das Verhältnis dieser beiden Grössen giebt $\frac{A+B+C-\pi}{4\pi}$, unabhängig vom Radius der Kugel; und das ist unser Lehrsatz.

Dieser Beweis gilt für den Fall, dass ϱ_1 und ϱ_2 gleiches Zeichen haben. Haben ϱ_1 und ϱ_2 entgegengesetztes Zeichen, so ist $\frac{\sigma}{s} = \frac{-1}{\varrho_1 . \varrho_2}$, weil σ und s wesentlich positiv sind. Dadurch erhält also unser Resultat das negative Zeichen; es wird $= \frac{\pi-(A+B+C)}{4\pi}$. Dies geschieht also, wenn die gegebene Fläche eine ist, deren Hauptkrümmungen entgegengesetzt sind.

Folgerung. Nimmt man statt des Dreiecks auf der Fläche ein beliebiges Polygon, dessen Seiten kürzeste Linien sind, so erhält man einen Satz, welcher dem vom sphärischen Polygon analog ist, so wie der von der Totalkrümmung des Dreiecks mit dem vom sphärischen Dreieck übereinkommt. Denn man kann das Polygon durch kürzeste Linien in Dreiecke zerlegen.

Anmerkung. Es sind auch einfachere Beweise für diesen Satz von der Totalkrümmung gefunden worden. Jacobi hat dazu einen Satz aufgestellt, der allgemeiner ist, indem er die Fläche gar nicht berührt. Der Satz lautet: Bildet man irgend ein Dreieck, dessen Seiten Curven doppelter Krümmung sind, und welches die Eigenschaft hat, dass in den Ecken, wo zwei Curven zusammenstossen, die Krümmungsradien beider gleiche Richtung besitzen, und zieht man ferner zu den sämmtlichen Krümmungsradien der Curven parallele Strahlen einer Hilfskugel, so ist der Inhalt des auf der Kugel gebildeten Dreiecks auf dieselbe Weise wie oben durch den sphärischen Excess oder Defect gegeben. — Dass unser Fall hierher gehört, folgt aus § 86., denn da die gegebene Fläche in jeder Ecke nur eine Normale hat und die Schmiegungsebenen beider sich dort schneidenden kürzesten Linien durch diese Normale geht, so fallen die Krümmungsradien beider in die Normale.

10. Die partiellen Differentialgleichungen der Flächen.

§ 100.

Die Darstellung der Flächen durch partielle Differentialgleichungen ist ein Ergebnis der Entstehungsart der Flächen.

Aufgabe 1. Die endliche und die partielle Differentialgleichung der Cylinderflächen zu finden.

Eine Cylinderfläche entsteht, wenn eine gerade Linie, beständig

parallel bleibend, sich entlang einer Curve oder überhaupt nach einem gewissen Gesetze bewegt. Nun ist die Gleichung irgend einer geraden Linie $\begin{cases} x = az + \alpha \\ y = bz + \beta \end{cases}$. Geben wir hierin den vier Grössen a, b, α, β andre und andre Werthe, so erhalten wir immer andre gerade Linien. Die Bedingung nun für die Aenderung dieser Werthe in der Art, dass die sich ergebenden geraden Linien parallel bleiben, ist die, dass a und b dabei constant sein müssen. Eine gerade Linie wird sich von der andern nur dadurch unterscheiden, dass ein gewisser Parameter einen andern Werth hat; die Grössen α und β müssen also von einander abhängig sein, oder man muss, wenn α gegeben ist, β daraus finden können, und umgekehrt. Daraus geht hervor, dass β irgend eine Function von α sein muss: $\beta = \varphi(\alpha)$. Geben wir nun dem α andre und andre Werthe, so erhalten wir die Totalität aller nach dem Vorigen bestimmten Geraden, und das ist die Cylinderfläche. Um ihre Gleichung zu finden, eliminiren wir α aus den beiden Gleichungen: $\alpha = x - az$, β oder $\varphi(\alpha) = y - bz$; dadurch erhalten wir $y - bz = \varphi(x - az)$, in welcher Gleichung φ eine ganz beliebige Function bedeutet. Diese Gleichung, der man allerdings noch andre Formen geben kann, stellt also alle Cylinderflächen dar.

Ausser dieser Definition, die eine willkürliche Constante enthält, giebt es noch eine zweite, die davon nicht unwesentlich verschieden ist, nämlich durch eine partielle Differentialgleichung. Differentiiren wir nämlich die obige Gleichung zuerst partiell nach x und dann partiell nach y, so erhalten wir folgende beide Gleichungen: $-bp = \varphi'(\alpha) . \frac{\partial \alpha}{\partial x}$ d. i. $= \varphi'(\alpha)(1 - ap)$ und $1 - bq = \varphi'(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial y} = -\varphi'(\alpha) aq$; dividiren wir diese beiden durcheinander, so fällt die willkürliche Function fort, und es ergiebt sich $\frac{+bp}{1-bq} = \frac{1-ap}{+aq}$ oder $ap + bq = 1$. Von dieser partiellen Differentialgleichung ist das Integral die vorher gefundene endliche Gleichung.

Dass die gefundene Differentialgleichung wirklich eine Cylinderfläche darstellt, sieht man daraus, dass sie der Ausdruck dafür ist, dass die Tangentialebene $\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$ parallel der Geraden $\zeta = \frac{\xi}{a} = \frac{\eta}{b}$ ist; sie drückt also aus, dass jede Tangentialebene einer Cylinderfläche den Geraden des Systems parallel ist; da aber jedesmal die Tangentialebene durch einen Punkt einer solchen Geraden geht, so folgt die bekannte Eigenschaft des Cylinders, dass jede Tangentialebene die ganze Kante des Cylinders enthält.

Aufgabe 2. Die allgemeine Gleichung der Kegelflächen aufzustellen.

Eine Kegelfläche entsteht, wenn eine gerade Linie durch einen

Punkt geht und sich sonst nach einem beliebigen Gesetze bewegt. Die Coordinaten des festen Punktes, den man den Scheitel nennt, mögen α, β, γ sein. Dann ist die Gleichung der sich bewegenden Geraden $\begin{cases} z-\gamma = a\,(x-\alpha) \\ z-\gamma = b\,(y-\beta) \end{cases}$. Hierin muss also a eine Function von b sein. Soll z. B. die gerade Linie immer durch die Curve $\begin{cases} \varphi\,(x, y, z) = 0 \\ \psi\,(x, y, z) = 0 \end{cases}$ gehen, so muss man die beiden Gleichungen

$$\varphi\,(\alpha + \frac{z-\gamma}{a},\ \beta + \frac{z-\gamma}{b},\ z) = 0 \text{ und } \psi(\alpha + \frac{z-\gamma}{a},\ \beta + \frac{z-\gamma}{b},\ z) = 0$$

haben, aus denen man durch Elimination von z offenbar eine Gleichung zwischen a und b bekommen wird: $\Theta\,(a, b) = 0$, und hieraus wiederum kann man b als Function von a bestimmen: $b = f\,(a)$. Ist statt der obigen Curve eine Fläche gegeben, welche die Kegelfläche immer umhüllen soll, so muss jede gerade Linie eine Tangente der gegebenen Fläche sein, woraus sich ebenfalls eine Gleichung zwischen a und b ableiten lässt. Wir müssen also in der obigen Gleichung der geraden Linie b als Function von a setzen, d. h. es muss $\frac{z-\gamma}{y-\beta}$ eine Function von $\frac{z-\gamma}{x-\alpha}$, oder wie man offenbar auch schreiben kann, es muss $f\left(\frac{z-\gamma}{x-\alpha}, \frac{z-\gamma}{y-\beta}\right) = 0$ sein. Ist der gegebene Punkt α, β, γ der Anfangspunkt, so hat man einfacher: $f\left(\frac{z}{x}, \frac{z}{y}\right) = 0$, d. h. in diesem Falle lässt sich die Gleichung des Kegels immer so schreiben, dass sie homogen ist in Beziehung auf x, y, z; und umgekehrt: Jede Gleichung, welche homogen ist in Beziehung auf die drei Coordinaten x, y, z, drückt eine Kegelfläche aus, deren Scheitel der Anfangspunkt der Coordinaten ist.

Um die partielle Differentialgleichung aus der endlichen, mit einer willkürlichen Function behafteten abzuleiten, schreiben wir diese in folgender Form, die wir ihr offenbar auch geben können: $\frac{x-\alpha}{z-\gamma} = F\left(\frac{y-\beta}{z-\gamma}\right) = F\,(c)$. Differentiiren wir diese Gleichung nach einander nach x und nach y, so wird sie:

$$\frac{z-\gamma-(x-\alpha)\,p}{(z-\gamma)^2} = -\,F'\,(c)\,\frac{(y-\beta)\,p}{(z-\gamma)^2}$$

oder

$$z-\gamma-(x-\alpha)\,p = -\,F'\,(c)\,(y-\beta)\,p$$

und

$$-\,(x-\alpha)\,q = F'(c)\,\{z-\gamma-(y-\beta)\,q\};$$

also durch Division

$$\frac{z-\gamma-(x-\alpha)\,p}{(x-\alpha)\,q} = \frac{(y-\beta)\,p}{z-\gamma-(y-\beta)\,q}$$

oder $\quad (z-\gamma)^2-(z-\gamma)\,(y-\beta)\,q-(z-\gamma)\,(x-\alpha)\,p = 0$

oder $(x-\alpha)p+(y-\beta)q=z-\gamma$. Die geometrische Interpretation dieser Gleichung ist, dass jede Tangentialebene der Fläche durch den Scheitel geht.

Aufgabe 3. Die allgemeine Gleichung für die Rotationsflächen zu bestimmen.

Zu dem Zwecke denken wir uns die Rotationsfläche dadurch entstanden, dass ein Kreis von veränderlichem Radius sich so bewegt, dass sein Mittelpunkt fortwährend auf einer Geraden bleibt, also handelt es sich hier um einen Kreis, der seine Lage und seine Form ändert. Der Anfangspunkt der Coordinaten liege auf der Rotationsaxe; die Gleichung dieser Axe sei demnach $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}\cdot$ Einen Kreis im Raume bestimmt man als Durchschnitt einer Kugel und einer Ebene. Wir nehmen hier eine Kugel, deren Mittelpunkt im Anfangspunkt der Coordinaten liegt; die schneidende Ebene steht also normal zur Axe. Demnach ist die Gleichung der Kugel $x^2+y^2+z^2=e$, die der schneidenden Ebene $ax+by+cz=d$. a, b, c sind constante gegebene Grössen; zwischen d und e muss eine Bedingungsgleichung stattfinden; also hat man folgende endliche Gleichung für alle Rotationsoberflächen: $ax+by+cz=\varphi(x^2+y^2+z^2)$. Hieraus ergiebt sich die Differentialgleichung, indem man partiell nach x und dann nach y differentiirt:

$$a+cp=2\varphi'(e)(x+zp),\ b+cq=2\varphi'(e)(y+zq)$$

und dividirt:

$$\frac{a+cp}{b+cq}=\frac{x+zp}{y+zq} \text{ oder } (cy-bz)p+(az-cx)q=bx-ay.$$

§ 101.

Ueber die Integration der linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Es handelt sich hierbei darum, eine Gleichung folgender Form zu integriren: $Ap+Bq=C$, worin A, B, C im Allgemeinen Functionen von x, y, z sein werden. Das Integral dieser Gleichung sei $\varphi(x, y, z)=0$; es fragt sich also, wie φ beschaffen sein muss, damit die gegebene Gleichung stattfinde? Es folgt zunächst, dass wie bekannt

$$p=-\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}} \text{ und } q=-\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}$$

ist, welche Werthe in die gegebene Gleichung substituirt, die Gleichung

$$A \frac{\partial \varphi}{\partial x} + B \frac{\partial \varphi}{\partial y} + C \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

identisch erfüllen müssen. Mit dieser mehr symmetrischen Form der vorgelegten Aufgabe beschäftigen wir uns nun, und stellen uns sogar die allgemeinere Frage:

Wie lautet das Integral der Gleichung

$$A \frac{\partial \varphi}{\partial x} + B \frac{\partial \varphi}{\partial y} + C \frac{\partial \varphi}{\partial z} + D \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \cdots = 0,$$

wo die Grössen $A, B, C, D \ldots$ Functionen sind von $x, y, z, u \ldots$ aber die Function φ nicht enthalten?

1) Zunächst lösen wir die Gleichung $A \frac{\partial \varphi}{\partial x} + B \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ auf, worin also A und B blos x und y enthalten; dabei aber von Null verschieden sein sollen.

a) Es seien A und B constant. Man löse zunächst die gewöhnliche Differentialgleichung $dx : dy = A : B$. Das Integral derselben ist, wenn man sie so schreibt: $B\,dx - A\,dy = 0$, folgendes $Bx - Ay = \text{const.}$ Wir wollen den Ausdruck $Bx - Ay = \eta$ also $y = \frac{Bx - \eta}{A}$ setzen. Dadurch wird

$$\varphi(x, y) = \varphi\left(x, \frac{Bx - \eta}{A}\right) = \psi(x, \eta).$$

Folglich

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \cdot B$$

und

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \cdot A.$$

Diese beiden Werthe geben in die vorgelegte Differentialgleichung eingesetzt: $A \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$ oder, da A nicht Null sein soll, $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$, oder ψ enthält x gar nicht, sondern nur η. Wir haben somit die allgemeinste Lösung gefunden. Die Function $\varphi(x, y) = 0$, welche der vorgelegten partiellen Differentialgleichung genügt, ist eine solche, dass in ihr nur die Verbindung $Bx - Ay$ vorkommt; denn es ist gefunden $\varphi = \psi(Bx - Ay)$.

b) Jetzt wollen wir annehmen, dass A und B nicht mehr constant sind, sondern x und y enthalten. Wenn wir jetzt wieder dieselbe Differentialgleichung aufstellen $B\,dx - A\,dy = 0$, so sind wir nicht mehr im Stande, diese Seite so unmittelbar zu integriren, da die linke Seite im allgemeinen nicht ein genaues Differential ist. Aber das wissen wir, dass wir jedesmal einen Factor finden können, mit dem multiplicirt die linke Seite ein genaues Differential wird. Dieser Factor sei μ, und die linke Seite alsdann das genaue Differential der Function η; dadurch erhalten wir also $\frac{\partial \eta}{\partial x} = \mu B$, $\frac{\partial \eta}{\partial y} = -\mu A$.

η enthält sowohl y als x; wir können daher jetzt das y durch η und x ausdrücken und dadurch die Function $\varphi(y, x)$ uns verwandelt denken in die Function $\psi(\eta, x)$. Hiernach wird

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \mu B, \ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \mu A,$$

und wenn wir dies in die vorgelegte Gleichung einsetzen, so wird sie zu folgender $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$, d. h. die Function ψ enthält nur η. Wir haben also jetzt folgende Regel: Um die partielle Differentialgleichung $A\frac{\partial \varphi}{\partial x} + B\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ zu integriren, in welcher A und B Functionen von x und y sind, aber φ nicht enthalten, integrire man zuerst die gewöhnliche Differentialgleichung $dx : dy = A : B$. Gesetzt, es sei das Integral dieser Gleichung der Ausdruck $\eta = c$, wo c die willkürliche Constante ist, und η eine Function von x und y: dann ist φ irgend eine beliebige Function von η.

2) Ehe wir zu der Integration einer partiellen Differentialgleichung zwischen drei Variabeln übergehen, schicken wir Folgendes voraus:

Das System zweier simultanen Differentialgleichungen

$$dx : dy : dz = A : B : C,$$

worin A, B, C Functionen von x, y, z sind, wird immer integrirt durch zwei Gleichungen zwischen x, y, z, die zwei willkürliche Constanten enthalten. — Denn schreibt man die Gleichungen so:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{B}{A} = \beta \\ \frac{dz}{dx} = \frac{C}{A} = \gamma \end{cases}$$

und differentiirt die zweite Gleichung noch einmal nach x, wodurch man bekommt: $\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial \gamma}{\partial y}\beta + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\gamma = \gamma_0$, so kann man, weil γ_0 auch x, y und z enthält, aus dieser Gleichung $\frac{d^2 z}{dx^2} = \gamma_0$ und aus der Gleichung $\frac{dz}{dx} = \gamma$ sich y eliminirt denken, wodurch man eine Gleichung zwischen $x, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2 z}{dx^2}$, also eine Gleichung von der Form $F\left(x, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2 z}{dx^2}\right) = 0$ erhält. Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung, zwischen den beiden Variabeln x und z, bei deren Integration immer zwei willkürliche Constanten auftreten. Diese beiden Constanten seien c und c_1. Wir haben also auf diese Weise z gefunden als Function von x: $z = \Theta(x, c, c_1)$. Wir können nun auch y finden, und zwar ohne weitere Integration.

Setzt man nämlich den für z gefundenen Werth in die Gleichung $\frac{dz}{dx} = \gamma$ ein, so wird sie $\frac{d\,\Theta(x, c, c_1)}{dx} = \gamma_1$, und in dieser Gleichung kommt links nur noch x, c, c_1 und rechts nur noch x und y vor. Zu der Gleichung $z = \Theta(x, c, c_1)$ haben wir also jetzt noch die Gleichung $\vartheta(x, y, c, c_1) = 0$ gefunden. Also ist erwiesen, dass zwei gleichzeitige gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung durch zwei Gleichungen integrirt werden, welche zwei willkürliche Constanten enthalten. — Wir nehmen nun an, dass diese beiden Gleichungen nach den willkürlichen Constanten aufgelöst werden, d. h. dass sie auf folgende zwei gebracht werden: $c = f(x, y, z)$ $c_1 = f_1(x, y, z)$. Durch zwei solche Gleichungen lässt sich also jedesmal das System $dx : dy : dz = A : B : C$ lösen. — Wir können noch fragen: Welches ist das Kriterium, damit die beiden Gleichungen $c = f(x, y, z)$, $c_1 = f_1(x, y, z)$ in der That dem vorgelegten Systeme $dx : dy : dz = A : B : C$ genügen? Aus der ersten Gleichung finden wir $0 = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz$, wodurch also die willkürliche Constante verschwunden ist. Soll diese Function f dem vorgelegten Systeme genügen, so muss man also auch die Gleichung $0 = \frac{\partial f}{\partial x} A + \frac{\partial f}{\partial y} B + \frac{\partial f}{\partial z} C$ haben, und zwar muss dies, weil auch A, B, C keine willkürlichen Constanten enthalten, eine identische Gleichung sein. Das Kriterium besteht also darin, dass man identisch die Gleichung hat $0 = f'(x) . A + f'(y) . B + f'(z) . C$ und ebenso $0 = f_1'(x) . A + f_1'(y) . B + f_1'(z) . C$. — Noch wollen wir bemerken, dass, wenn auch in den Functionen f und f_1 von den Grössen x, y, z einige fehlen, z. B. in f die Veränderliche z oder auch z und y, es doch unmöglich ist, dass in beiden f und f_1 etwa y und z gleichzeitig fehlten. Wenn nämlich dies der Fall wäre, müsste $A = 0$ sein. Wir wollen daher annehmen, dass in f von den drei Grössen x, y, z wenigstens die Grösse y, und in f_1 wenigstens die Grösse z vorkommt. Wir bezeichnen daher auch $f(x, y, z)$ durch η, und $f_1(x, y, z)$ durch ζ, so dass wir haben $\eta = c$, $\zeta = c_1$.

Dies vorausgeschickt, stellen wir uns vor, dass man behufs der Lösung der Gleichung $A\frac{\partial \varphi}{\partial x} + B\frac{\partial \varphi}{\partial y} + C\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$, in welcher A, B, C Functionen von x, y, z sind, aber φ nicht enthalten, y und z durch x, η und ζ ausgedrückt habe. Dadurch geht die Integralfunction $\varphi(x, y, z)$ über in $\psi(x, \eta, \zeta)$, also $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ in $\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} . f'(x) + \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} . f_1'(x)$, ferner $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ in $\frac{\partial \psi}{\partial \eta} . f'(y) + \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} . f_1'(y)$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ in $\frac{\partial \psi}{\partial \eta} f'(z) + \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} f_1'(z)$. Multipliciren wir diese drei Gleichungen der Reihe nach mit A, B, C und addiren sie, so wird die Summe der vorgelegten Gleichung und der

beiden oben aufgestellten identischen Gleichungen wegen zu folgender $0 = \frac{\partial \psi}{\partial x}$; ψ enthält also x nicht, sondern nur η und ζ; d. h. φ ist irgend eine willkürliche Function von f und f_1. Wir haben also die Regel: Liegt die lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung $A\frac{\partial z}{\partial x} + B\frac{\partial z}{\partial y} = C$, worin A, B und C x, y, z enthalten, zur Integration vor, d. h. soll man die Gleichung zwischen x, y, z, $\varphi(x, y, z) = 0$ finden, die der vorgelegten Gleichung genügt, die also die Gleichung $A\frac{\partial \varphi}{\partial x} + B\frac{\partial \varphi}{\partial y} + C\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$ identisch erfüllt: so integrire man zuerst das System zweier gewöhnlichen simultanen Differentialgleichungen $dx : dy : dz = A : B : C$ durch die beiden Gleichungen $\begin{cases} f\,(x, y, z) = c \\ f_1(x, y, z) = c_1 \end{cases}$; alsdann giebt jede willkürliche Function zwischen f und f_1, gleich $\varphi(x, y, z)$ gesetzt, oder f als eine willkürliche Function von f_1 angenommen, das Integral der vorgelegten Gleichung.

Auf Functionen mehrerer Variabeln lässt sich ganz dasselbe Verfahren anwenden. —

Diese einfache Reduction der linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen ist eine von Lagrange's schönsten Erfindungen.

§ 102.

Wir wollen nun noch an einigen Beispielen zeigen, wie man aus der Differentialgleichung einer Fläche ihre endliche, mit einer willkürlichen Function behaftete, finden kann.

1) Die Gleichung der Cylinderflächen $ap + bq = 1$ wird integrirt, indem man das System folgender Gleichungen integrirt

$$dx : dy : dz = a : b : 1 \text{ oder } \frac{dz}{dx} = \frac{1}{a} \quad \frac{dz}{dy} = \frac{1}{b}$$

oder $adz - dx = 0$, $bdz - dy = 0$, woraus folgt $az - x = c$, $bz - y = c_1$; also ist das Integral der vorgelegten Gleichung folgendes

$$az - x = \varphi(bz - y),$$

der Sache nach dasselbe, von welchem wir oben ausgingen, als wir die partielle Differentialgleichung herleiteten.

2) Die Gleichung der Kegelflächen

$$(x - a)p + (y - b)q = z - c$$

liefert folgendes System behufs der Integration

$$dx : dy : dz = x - a : y - b : z - c \text{ oder } \frac{dz}{z - c} = \frac{dx}{x - a} = \frac{dy}{y - b},$$

also integrirt

$$l(z-c)-l(x-a)=lc_1 \quad l(z-c)-l(y-b)=lc_2$$

und demnach, wenn man zu den Numeris übergeht

$$\frac{z-c}{x-a}=c_1, \frac{z-c}{y-b}=c_2; \text{ also } \frac{z-c}{x-a}=\varphi\left(\frac{z-c}{y-b}\right).$$

3) Die Gleichung $p-q=0$ giebt $dx:dy:dz=1:-1:0$, also $dy=-dx$, $dz=0$; folglich $y+x=c$, $z=c_1$ oder $z=\varphi(x+y)$.

4) Die Gleichung der Rotationsflächen

$$(cy-bz)p+(az-cx)q=bx-ay$$

giebt folgendes System

$$dx:dy:dz=cy-bz:az-cx:bx-ay.$$

Dies schreiben wir behufs der Integration so:

$$\lambda dx=cy-bz \quad \lambda dy=az-cx \quad \lambda dz=bx-ay.$$

Hieraus können wir folgende beiden Gleichungen ableiten:

$$adx+bdy+cdz=0 \quad xdx+ydy+zdz=0,$$

indem wir nämlich die drei Gleichungen der Reihe nach mit a, b, c resp. mit x, y, z multipliciren, und dann addiren. Diese letzten beiden Gleichungen sind aber sofort integrabel; sie geben:

$$ax+by+cz=c_1 \quad x^2+y^2+z^2=c_2,$$

also ist das Integral der vorgelegten partiellen Differentialgleichung, d. h. die endliche Gleichung der Rotationsflächen, folgende

$$ax+by+cz=\varphi(x^2+y^2+z^2).$$

5) Wie man sich bei partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnungen und Grade verhalten kann, wollen wir an dem Beispiel der abwickelbaren Flächen zeigen. Es sei vorgelegt die Gleichung $rt-s^2=0$. Wir schreiben sie in folgender Form: $\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial q}{\partial y}-\frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{\partial q}{\partial x}=0$. Denken wir uns q als gegebene Function, so finden wir p nach den obigen Regeln, indem wir das System folgender gewöhnlicher Differentialgleichungen integriren, $dx:dy:dp=\frac{\partial q}{\partial y}:-\frac{\partial q}{\partial x}:0$. Hieraus folgt zunächst $dp=0$ oder $p=c$. Ferner ist $\frac{\partial q}{\partial y}dy+\frac{\partial q}{\partial x}dx$, d. h. das vollständige Differential von q oder $dq=0$, folglich $q=c_1$. Dass diese beiden Gleichungen wirklich der vorgelegten Gleichung genügen, sieht man sofort; es genügt auch die Gleichung $p=\varphi(q)$; denn differentiirt man diese partiell nach x und dann nach y, so erhält man $r=\varphi'(q).s$ resp. $s=\varphi'(q).t$, und durch Elimination von $\varphi'(q)$ die vorgelegte Differentialgleichung. — Es ist also p eine will-

kürliche Function von q, oder, wie wir schreiben wollen: $q = f(p)$. Um hieraus die gesuchte Fläche zu erkennen, verfahren wir so: Es ist $dz = p.dx + q.dy$, also mit Einsetzung des Werthes von q: $dz = p.dx + f(p).dy$. Integrirt man diese Gleichung, und zwar rechts theilweise, so hat man $z = p.x - \int x\,dp + y.f(p) - \int y f'(p)\,dp$ oder $z = p.x + f(p).y - \int \{x + yf'(p)\}\,dp$. Es muss sich also, wenn man das Integral soll ausführen können, $x + y.f'(p)$ in eine Function von p verwandeln lassen; wir setzen $x + y.f'(p) = \psi'(p)$. Es wird somit $z = px + f(p).y - \psi(p)$. Diese beiden Gleichungen ergeben unsre Auflösung. Schreiben wir sie in folgender Gestalt: $z = px + f(p).y - \psi(p) \quad 0 = x + f'(p)y - \psi'(p)$, so übersehen wir leicht, dass die zweite das partielle Differential der ersten nach p ist. Wenn wir also, um die Gleichung der gesuchten Fläche zu finden, p aus den beiden Gleichungen eliminiren, wodurch sich eben eine Gleichung ergiebt, die nur noch x, y, z enthält: so haben wir nach einem bekannten Satze dadurch die Fläche gefunden, welche von allen Flächen umhüllt wird, deren Gleichung

$$z = p.x + f(p).y - \psi(p)$$

ist, worin p einen constanten Parameter bedeutet. Giebt man aber dem, wie oben gefunden, constanten p nach und nach alle möglichen Werthe, so wird die umhüllende Fläche immer eine Ebene sein, wie man leicht übersieht: die gesuchte Fläche ist also eine solche, welche die Durchschnitte je zweier aufeinanderfolgenden Ebenen des umhüllenden Systems enthält: sie ist eine abwickelbare Fläche.

Nachträge.

1) Vom integrirenden Factor.

Lehrsatz. Sind P und Q Functionen von x und y, so ist $Pdx + Qdy$ ein genaues Differential, falls $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ist.

Denn es sei $f(x, y)$ das Integral der vorliegenden Form, so muss, weil das Differential von f gleich

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \text{ ist, } P = \frac{\partial f}{\partial x} \quad Q = \frac{\partial f}{\partial y}$$

sein, damit f das Integral ist. Die Haupteigenschaft dieser beiden Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ ist aber, dass

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x}$$

ist. Es muss also $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ sein. — Dass diese Bedingung aber nicht blos nothwendig, sondern ausreichend ist, lässt sich so beweisen: Bezeichnet man das Integral $\int P \partial x$*) durch F, so kommt in der Verbindung $Q - \frac{\partial F}{\partial y}$, die wir $= F_1$ setzen wollen, die Veränderliche x nicht mehr vor; denn es ist $\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial x . \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$: diese Differenz ist aber nach der aufgestellten Bedingung Null; somit ist $\frac{\partial F_1}{\partial x} = 0$, d. h. x in F_1 nicht enthalten. Daraus folgt, dass auch in dem Integral $\int \left(Q - \frac{\partial F}{\partial y}\right) \partial y$*), welches wir $= \varphi$ setzen wollen, nur noch y enthalten ist. Dies vorausgeschickt, lässt sich nun das Integral der vorgelegten Form $Pdx + Qdy$ angeben: es ist $F + \varphi$. Denn

*) Das Cursiv ∂ bedeutet hier, dass nach x, und im zweiten Falle nach y integrirt, also resp. y oder x dabei als constant angesehen werden soll, falls es vorkommt.

differentiirt man diese Summe vollständig nach x und y, so erhält man $\frac{\partial F}{\partial x} dx + \left(\frac{\partial F}{\partial y} + Q - \frac{\partial F}{\partial y}\right) dy$, weil $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$ ist; da nun $F = \int P \partial x$ ist, so ist unser Differential $Pdx + Qdy$; also gehört dazu das Integral $\int Pdx + \int Qdy - \int \frac{\partial \int P \partial x}{\partial y} \partial y$ unter der Bedingung, dass $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ist.

Lehrsatz 2. Ist in der Formel $Pdx + Qdy = 0$ nicht $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, so kann man dennoch einen Factor μ finden, welcher die linke Seite zu einem genauen Differential macht. Er heisst der integrirende Factor.

Es soll also $\mu P . dx + \mu Q . dy$ ein genaues Differential, d. h. nach dem vorigen Lehrsatze $\frac{\partial (\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial (\mu Q)}{\partial x}$ sein. Durch Ausführung der Differentiationen erhält man hieraus $P \frac{\partial \mu}{\partial y} - Q \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$. Um aus dieser partiellen Differentialgleichung für μ dieses μ zu finden, müssen wir nach Anleitung von § 101., 2) zuerst folgendes System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$dx : dy : d\mu = - Q : P : \mu \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

lösen. Dieses giebt zunächst $Pdx + Qdy = 0$, eine Gleichung, welche zwar den Factor μ nicht finden lehrt, wie man überhaupt denselben allgemein nicht finden kann, wenn es auch (wie Jacobi bewiesen hat), viele Fälle giebt, in denen man a priori diesen Multiplicator angeben kann; aber doch zeigt die Gleichung, welche wir gefunden haben, dass es immer möglich ist, einen solchen Factor zu finden.

2) Geometrischer Beweis des Meusnier'schen Satzes.

Lehrsatz. Der Krümmungsradius eines schiefen Schnittes ϱ_1 steht zum Krümmungsradius ϱ des betreffenden Normalschnitts im Verhältnis des Sinus des Winkels φ, den die Ebene des schiefen Schnittes mit der Tangentialebene bildet.

Man ziehe in einer Tangentialebene der Fläche im Punkte A eine Tangente: diese wird mit der Fläche noch einen dem Punkte A unendlich nahen Punkt B gemeinschaftlich haben, siehe Fig. 43. Legt man nun durch AB den Normalschnitt, so wird in dieser Ebene dem Punkte B etwa der Punkt C der nächste sein, und legt man irgend einen schiefen Schnitt durch AB, so möge C' der dem Punkte B benachbarte in dieser Ebene sein: ABC sind also zwei aufeinanderfolgende Elemente des Normalschnitts, ABC' die entsprechenden des

vorliegenden schiefen Schnittes. Der Winkel CBC', um welchen sich der Normalschnitt vom schiefen Schnitte entfernt, ist ein endlicher. Da nun BC und BC' Elemente auf der Oberfläche sind und von einem Punkte ausgehen, so ist CBC' die Tangentialebene in B. Wie wir oben (§ 14.) gesehen haben, ist der Krümmungsradius irgend einer Curve gleich dem Quotienten: $\frac{\text{Bogenelement}}{\text{Contingenzwinkel}}$. Für den Contingenzwinkel können wir dabei, weil er sehr klein ist, seinen Sinus (oder auch seine Tangente) setzen. Es wird somit für den schiefen Schnitt, wenn wir uns AB über B hinaus nach β verlängert denken:

$$\varrho_1 = \frac{AB}{\sin \beta BC'} \text{ und für den Normalschnitt } \varrho = \frac{AB}{\sin \beta BC};$$

$$\text{also } \frac{\varrho_1}{\varrho} = \frac{\sin \beta BC}{\sin \beta BC'}.$$

Denken wir uns nun noch um B mit einem beliebigen Radius etwa BC' eine Kugel beschrieben, so ist in dem entstehenden sphärischen Dreiecke $\beta'' C' C''$ (β'' und C'' seien die Durchschnitte von $B\beta$ resp. BC in diese Kugel) $\sphericalangle \beta'' C'' C'$ ein rechter: denn die Normalebene ABC oder βBC steht rechtwinklig zu der Tangentialebene CBC'. Ferner ist $\sphericalangle \beta'' C' C'' = \varphi$, wie wir oben den Winkel des schiefen Schnitts mit der Tangentialebene bezeichnet haben; also ist nach einem Satze der sphärischen Trigonometrie

$$\frac{\sin \beta'' C''}{\sin \beta'' C'} \text{ d. i. } \frac{\sin \beta BC}{\sin \beta BC'} \text{ oder } \frac{\varrho_1}{\varrho} = \sin \varphi.$$

3) Lehrsatz.

Lehrsatz. Der Krümmungsradius einer Curve auf einer abwickelbaren Fläche r steht zum Krümmungsradius r' derjenigen Curve, welche aus der ersten bei der Abwickelung der Fläche sich ergiebt, im Verhältnis des Cosinus desjenigen Winkels i, den die Tangentialebene der Fläche und die Schmiegungsebene der Curve bilden.

Man denke sich zwei Elemente der abwickelbaren Fläche, siehe Fig. 44, und in ihnen eine Curve gezeichnet; im ersten Element der Fläche liege das Element AB der Curve, im zweiten Element der Oberfläche das Element BC der Curve. Drehen wir nun das zweite Element der Fläche unendlich wenig, so dass es in die Ebene des ersten zu liegen kommt, wodurch das Curvenelement BC die Lage Bc einnehmen mag, so wird, weil der Winkel CBc unendlich klein ist, die Ebene CBc als normal auf der Ebene ABc stehend angesehen werden können. Denken wir uns nun das erste Curvenelement AB nach β verlängert, so ist, wie schon in 2) erwähnt

wurde, der Krümmungsradius vor der Abwickelung $r = \frac{AB}{\operatorname{tg} CB\beta}$, der Krümmungsradius nach der Abwickelung $r' = \frac{AB}{\operatorname{tg} cB\beta}$, also der Quotient beider $\frac{r}{r'} = \frac{\operatorname{tg} cB\beta}{\operatorname{tg} CB\beta}$. Denken wir uns nun wiederum um B mit einem beliebigen Radius eine Kugel beschrieben, so ist das durch die Linien BC, Bc, $B\beta$ bestimmte Dreieck auf derselben wiederum rechtwinklig, weil $\sphericalangle (CBc, cB\beta) = R$ angesehen werden darf. Es ist nun nach einem Satze der sphärischen Trigonometrie $\frac{\operatorname{tg} cB\beta}{\operatorname{tg} CB\beta}$ gleich $\cos (CB\beta, cB\beta)$, d. i. $\frac{r}{r'} = \cos i$, denn $CB\beta$ ist zugleich die Ebene ABC, d. h. die Schmiegungsebene der Curve, und $cB\beta$ oder ABc die Tangentialebene der Fläche, denn sie ist die Ebene des ersten Elements.

Wir verificiren unsre Gleichung zunächst am geraden Kegel, siehe Fig. 45. Bezeichnet man seine Seite mit s, die Höhe mit h und den Radius des Grundkreises mit r, so ist für irgend einen Punkt in der Peripherie des Grundkreises der Krümmungsradius r. Wickelt man den Kegel ab, so wird aus seinem Grundkreise ein Bogen, dessen Radius s ist. Der Winkel zwischen der Tangentialebene des Kegels und der Schmiegungsebene des Grundkreises endlich ist identisch derselbe wie der Winkel (s, r), also erhält man aus unserm Lehrsatz die bekannte Gleichung $\frac{r}{s} = \cos (s, r)$.

Ferner folgt aus unserm Lehrsatz für die kürzesten Linien auf abwickelbaren Flächen, weil bei diesen $r' = \infty$ ist, indem sie durch die Abwickelung zu geraden Linien werden, dass $\cos i = 0$ also $i = 90^0$ ist (falls nicht $r = 0$ ist). Dies ist aber die bekannte Eigenschaft der kürzesten Linien, dass ihre Schmiegungsebene normal steht zur Tangentialebene der Fläche.

4) Von den Evoluten der Curven im Raume.

Man denke sich irgend eine Curve, einfacher oder doppelter Krümmung, siehe Fig. 46; in einem Punkte A derselben nach einer Seite die Tangente gezogen und auf derselben von A aus ein Stück $= l$ abgetragen. Denken wir uns nun in einem Punkte O der Curve einen Faden befestigt, welcher bis A an der Curve anliegt und von da in der Tangente noch um das Stück l weiter geht, so wird der freie Endpunkt dieses Fadens, wenn man den Faden von der Curve abwickelt, und dabei immer gespannt hält, eine neue Curve beschreiben, welche die Evolvente der gegebenen heisst; die gegebene wird nun die Evolute der neuen genannt. Offenbar ist,

wenn die Abwickelung z. B. bis B gekommen ist, das freie Stück des Fadens $m = BA + l = s + l$. Aus dieser Gleichung lassen sich leicht die Coordinaten ξ, η, ζ des Endpunktes von m angeben. Ist nämlich die Evolute gegeben durch drei Gleichungen, welche x, y, z als Function des Bogens s darstellen, so hat man offenbar:

$$\xi - x = m.\cos(m, x) = -(s + l).\frac{dx}{ds},$$

weil m Tangente in B ist. Also findet man aus den Gleichungen der Evolute folgende für die Evolvente:

$$\begin{cases} \xi = x - (s + l)\dfrac{dx}{ds} \\ \eta = y - (s + l)\dfrac{dy}{ds} \\ \zeta = z - (s + l)\dfrac{dz}{ds} \end{cases}.$$

Jetzt handelt es sich darum, wenn die Evolvente gegeben ist, die Evolute zu finden. Für die ebenen Curven ist bekanntlich die Curve der Krümmungsmittelpunkte die Evolute, welche bei der Ellipse, siehe Fig. 47, die bekannte Curve mit 4 Spitzpunkten ist. Aber nicht blos diese eine ist Evolute der Ellipse, sondern: Jede Curve und zunächst die ebenen alle haben unzählig viele Evoluten.

Um dies zu beweisen, siehe Fig. 48, denken wir uns eine ebene Curve AA gegeben und fragen, ob es möglich sei, dass diese Curve durch Abwickelung einer Curve doppelter Krümmung BB entstanden sei, oder auch, welches alle Curven sind, deren Abwickelung die Curve AA giebt? Die Coordinaten irgend eines Punktes der gesuchten Curve BB seien x, y, z, die eines Punktes in der gegebenen Curve AA seien $\xi, \eta, 0$, indem wir die Ebene dieser Curve als Coordinatenebene der xy ansehen. Auf diese Ebene projiciren wir die Curve BB; ihre Projection sei CC, deren Punkte also mit den entsprechenden in BB die Coordinaten x und y gemein haben. Ferner sei s ein Bogen der Curve BB von irgend einem Punkte angefangen, σ der Bogen der Curve AA und u der Bogen von CC, welche letztere so gezählt werden mögen, dass sie mit s gleichzeitig verschwinden. Dann finden, weil AA eben sein soll, folgende drei Gleichungen statt:

$$\begin{cases} \xi = x - (s + l)\dfrac{dx}{ds} \\ \eta = y - (s + l)\dfrac{dy}{ds} \\ 0 = z - (s + l)\dfrac{dz}{ds} \end{cases}.$$

Die letzte dieser drei Gleichungen lässt sich leicht integriren. Differentiiren wir sie zunächst noch einmal nach s, so erhalten wir $0 = \frac{dz}{dz} - \frac{dz}{ds} - (s+l)\frac{d^2z}{ds^2}$ oder $\frac{d^2z}{ds^2} = 0$ und daraus $\frac{dz}{ds}$ constant. Setzen wir die Constante $= \sin i$, so wird also $\frac{dz}{ds} = \sin i$, und folglich durch nochmalige Integration $z = \alpha + s.\sin i$. Nun ist

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = du^2 + dz^2$$

also

$$du^2 = ds^2 - dz^2 = ds^2 \cos^2 i$$

und $u = \beta + s.\cos i$, und folglich $z = \alpha + (u - \beta)\,\mathrm{tg}.\,i$.

Diese Gleichung giebt folgendes Resultat: Da die Curven CC und BB zusammen auf demselben Cylinder liegen, so wird die Curve BB, wenn man den Cylinder aufrollt, eine Gerade; denn da man alsdann CC als Abscissenaxe annehmen kann, so wird u die Abscisse, z die Ordinate der Linie BB, und diese sind durch die lineäre Gleichung $z = \mathrm{tg}\, i . u + (\alpha - \beta\,\mathrm{tg}\, i)$ verbunden. Daraus folgt aber, dass die Linie BB vor der Abwickelung eine Schraubenlinie ist, denn diese werden bei der Abwickelung gerade.

Weiter finden wir, wenn wir jetzt aus den Gleichungen für ξ und η s durch u eliminiren:

$$\xi = x - \left(\frac{u-\beta}{\cos i} + l\right)\frac{dx}{ds} = x - \left(\frac{u-\beta}{\cos i} + l\right)\frac{dx}{du}\cdot\cos i$$

$$= x - (u - \beta + l\cos i)\frac{dx}{du},$$

oder wenn wir statt der wegen β und i willkürlichen Constanten $l\cos i - \beta$ die ebenfalls willkürliche Constante m einführen:

$$\begin{cases} \xi = x - (u+m)\dfrac{dx}{du} \\ \eta = y - (u+m)\dfrac{dy}{du} \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen sagen aus, dass CC von der Curve AA die Evolute ist.

Anstatt daher die Curve AA durch Abwickelung der in derselben Ebene liegenden Curve CC zu erzeugen, kann man auch auf dieser Curve CC einen Cylinder aufrichten, und auf diesem von A aus eine Schraubenlinie construiren, welche demnach ebenfalls durch ihre Abwickelung die Curve AA erzeugt.

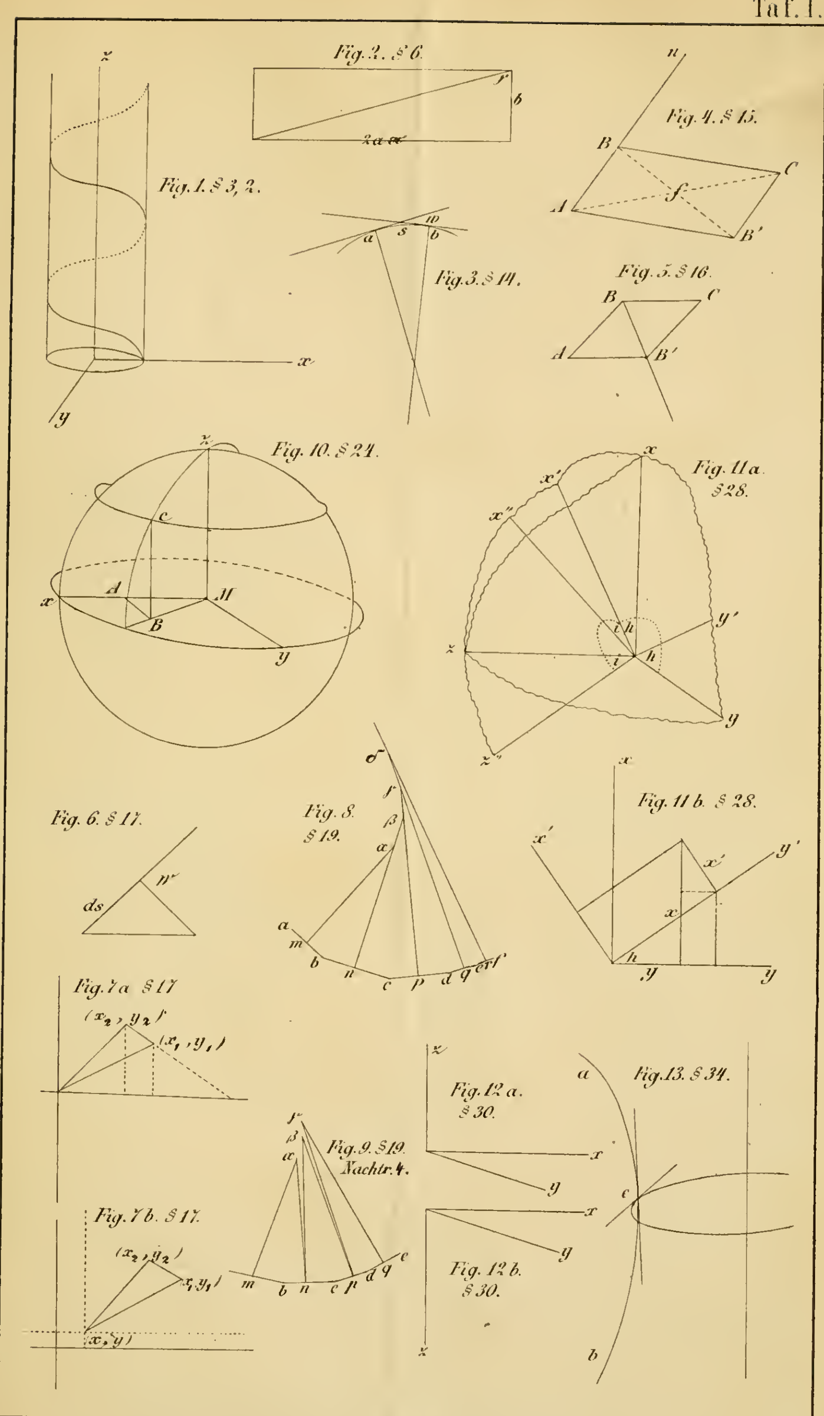
Wenn wir dies geometrisch nachweisen, werden wir es auch sofort auf Curven doppelter Krümmung erweitern können. Zu dem Ende denken wir uns zunächst zwei Elemente einer ebenen Curve oder zwei anstossende Seiten des Polygons, als dessen Grenzfall die Curve angesehen werden kann, siehe Fig. 49. Diese Seiten seien ab, bc.

Wir legen einen Kreis durch a, b, c, dessen Mittelpunkt also α ist, wenn α normal über den Mitten von ab und bc liegt. Ist $ab = bc$, so ist α zugleich der Mittelpunkt des Kreises, der diese Polygonseiten berührt; wir können aber auch, wenn $ab \gtrless bc$ ist, α für den Mittelpunkt dieses Kreises ansehen, wenn wir vom Polygon zur Curve übergehen. Es ist aber nicht blos α Mittelpunkt für diese beiden Kreise, sondern jeder Punkt α' der Geraden, die man in α normal auf der Ebene abc errichtet; es ist nämlich $a\alpha' = b\alpha'$, die bekannte Definition für den Mittelpunkt des Kreises. Nehmen wir nun die dritte Polygonseite cd dazu, und betrachten wiederum den Kreis, der durch die Punkte b, c, d geht oder die Seiten bc, cd berührt, so ist nicht blos β der Mittelpunkt dieses Kreises, welches normal liegt über den Mitten von bc und cd, sondern auch jeder Punkt der Geraden, welche man in β normal auf der Ebene bcd oder abc errichten kann, und welche demnach der ersten Geraden $\alpha\alpha'$ parallel ist. Verlängern wir daher $b\alpha'$ in der Ebene dieser beiden Normalen bis β', wo diese Verlängerung $\beta\beta'$ trifft, so muss $\beta' b = \beta' c$ sein. Nehmen wir ebenso die vierte Polygonseite de dazu, so können wir in dem Punkte γ, welcher zunächst Mittelpunkt des Kreises cde ist, wiederum die Normale auf der Ebene cde oder abc also $\| \alpha\alpha' \| \beta\beta'$ errichten, und auf derselben einen Punkt γ' durch die Verlängerung von $c\beta'$ bestimmen, welcher wie alle Punkte von $\gamma'\gamma$ ebenfalls Mittelpunkt des Kreises cde sein wird, so dass $\gamma' c = \gamma' d$ ist. So können wir fortfahren und finden dadurch, dass $abcde\ldots$ entstanden ist, indem man einen Faden von $\alpha'\beta'\gamma'\ldots$ abwickelt, denn man hat: $b\alpha' = a\alpha'$, $c\beta' = b\alpha' + \alpha'\beta'$, $d\gamma' = c\beta' + \beta'\gamma'$ u. s. w. Nun ist $\alpha\beta\gamma\ldots.$ die ebene Evolute von $abcde\ldots.$, die Normalen $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'\ldots.$ bilden eine Cylinderfläche, und $\alpha'\beta'\gamma'\ldots.$, welches somit eine doppelt gekrümmte Evolute von $abcde\ldots.$ ist, ist eine kürzeste Linie auf dieser Cylinderfläche, d. h. eine Schraubenlinie.

Sind $abcde\ldots$ die Elemente einer Curve doppelter Krümmung, siehe Fig. 50, so tritt der Umstand ein, dass die Ebene abc nicht mehr dieselbe ist wie bcd, und diese wiederum verschieden von cde u. s. f., denn die Schmiegungsebene ändert sich von Ort zu Ort. Construirt man daher wie vorhin die Krümmungsmittelpunkte $\alpha, \beta, \gamma\ldots.$, welche je in derselben Ebene mit den entsprechenden Stücken abc, bcd, cde,... liegen, so trifft hier (wie bereits in § 19. erwähnt worden ist), (siehe Fig. 9.), die Linie $\alpha\beta$ nicht mehr die Curve $abcde\ldots.$, und ebenso $\beta\gamma$ und alle übrigen. Darum ist hier die Curve $\alpha\beta\gamma\ldots.$ der Krümmungsmittelpunkte keine Evolute mehr. Bestimmt man aber diese Mittelpunkte $\alpha, \beta, \gamma\ldots.$ und errichtet in ihnen die Normalen auf der jedesmaligen Osculationsebene, so sind

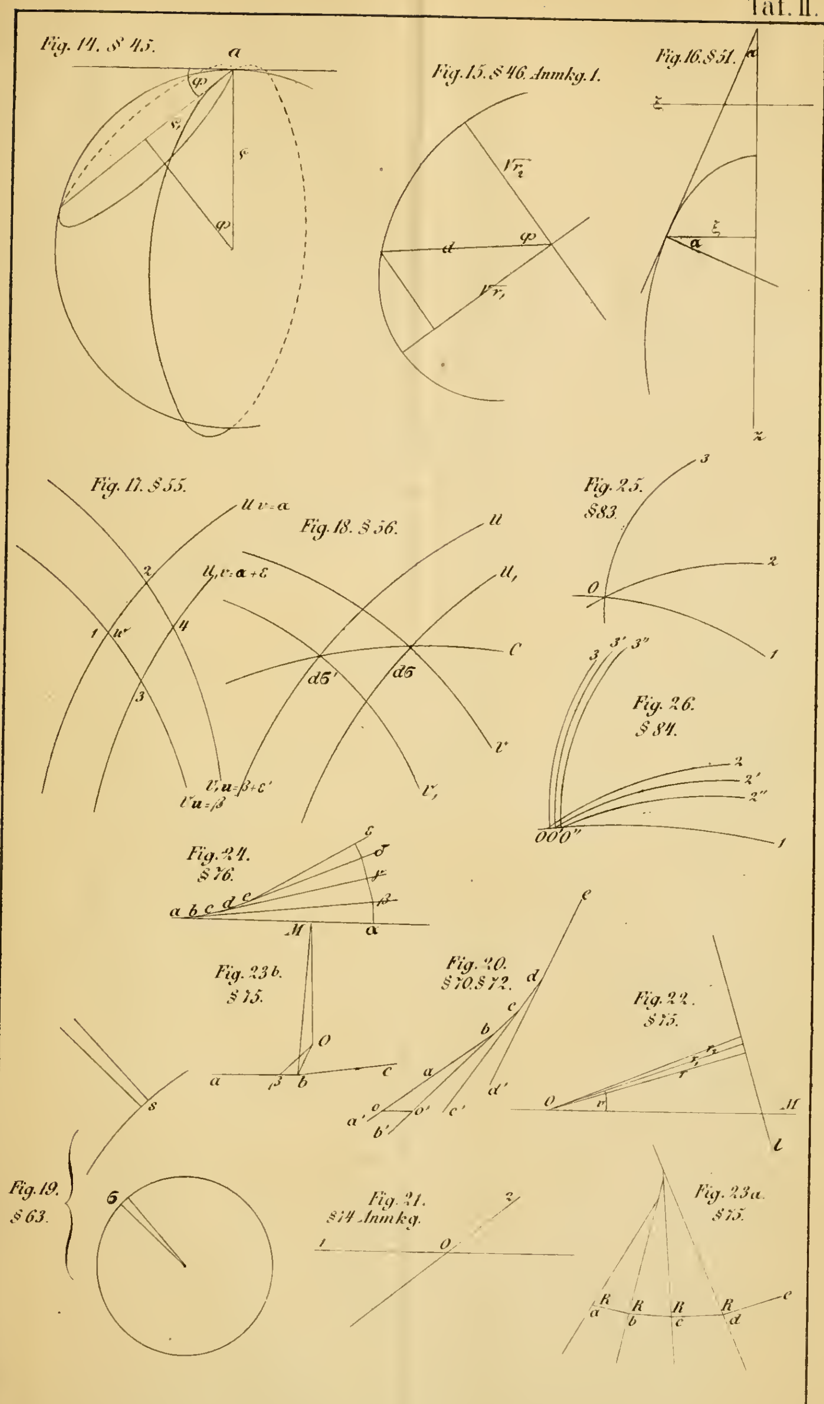
diese nicht mehr parallel, sondern schneiden einander, und bilden deshalb eine abwickelbare Fläche. Es schneiden sich nämlich je zwei Normalen in dem Mittelpunkte der betreffenden Osculationskugel. Es ist z. B. m, der Durchschnitt von $\alpha\alpha'$ und $\beta\beta'$, der Mittelpunkt der Schmiegungskugel für $abcd$; $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$.... sind also sämmtlich Tangenten zu der Curve, die die Mittelpunkte der Osculationskugeln enthält; d. h. sie bilden eine abwickelbare Fläche, für welche diese Curve die Wendungskante ist. Es lässt sich nun genau so wie vorhin übersehen, dass $\alpha'\beta'\gamma'$.... eine Evolute von $abcde$.... ist, wenn nämlich $a\alpha'$ beliebig gezogen wird, α' mit b verbunden, $b\alpha'$ über α' hinaus bis β' verlängert, $c\beta'$ gezogen und über β' bis γ' verlängert wird u. s. w. Wir haben somit den Satz:

Bestimmt man für eine Curve die Curve der Krümmungsmittelpunkte, und errichtet in jedem dieser Mittelpunkte, falls die Curve eben ist, auf dieser Ebene, oder, ist die Curve von doppelter Krümmung, auf der jedesmaligen Schmiegungsebene die Normale, so bilden diese Normalen im Allgemeinen eine abwickelbare Fläche, bei den ebenen Curven eine Cylinderfläche. Auf diesen Flächen liegen alle Evoluten der vorgelegten Curve. Wie man jede Evolute einzeln bestimmt, ist aus dem Vorhergehenden klar.



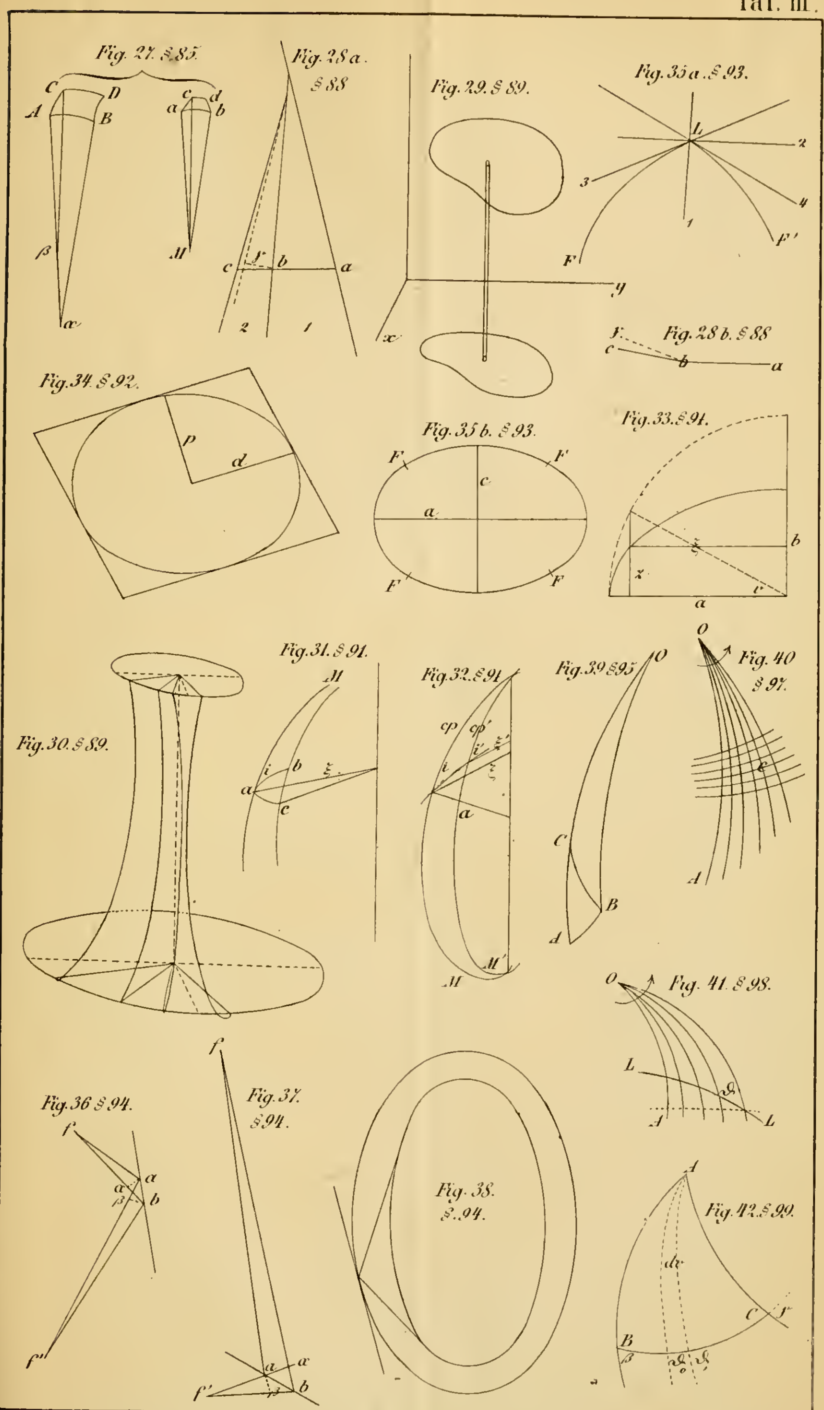
LITH ESCHEBACH & SCHAEFER, LEIPZIG





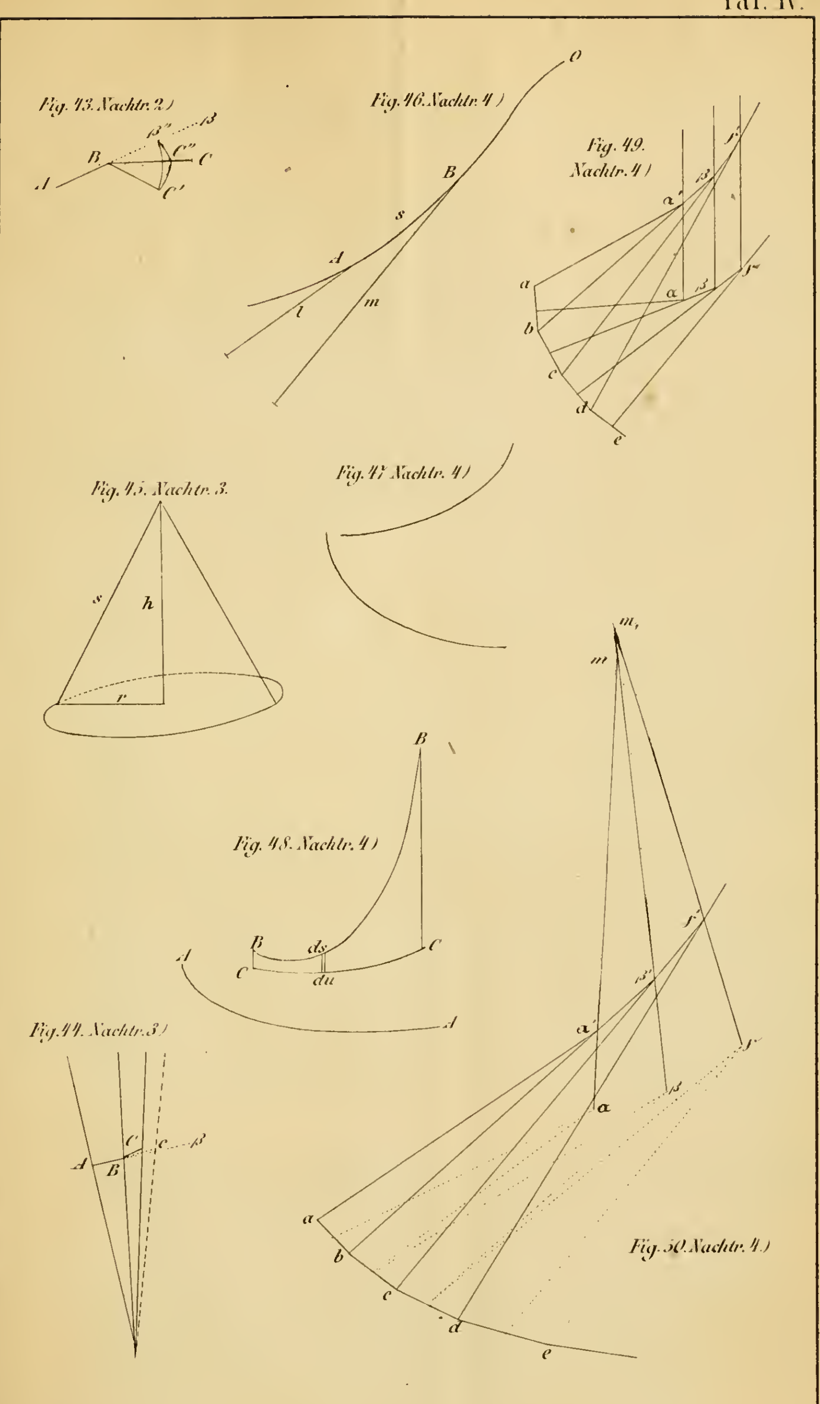
LITH ESCHEBACH & SCHAEFER





LITH. ESCHEBACH & SCHAEFER, LEIPZIG





LITH ESCHEBACH & SCHAEFER, LEIPZIG



Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Lehrbuch der Arithmetik und Algebra von Dr. Karl Heinrich Liersemann. gr. 8. 1871. geh. Preis n. 12 Ngr.

Das vorliegende Lehrbuch der Arithmetik und Algebra verfolgt den Zweck, durch streng systematische Anordnung des Stoffes die wundersame Gliederung des Lehrgebäudes zum schärfsten Ausdruck zu bringen, und somit den Lehrer, welcher dieses Lehrbuch seinem Unterrichte zu Grunde legt, von den Fesseln frei zu halten, welche eine aus pädagogischen Rücksichten hervorgegangene Anordnung auflegt. Die in mehreren Lehrbüchern an die Spitze gestellten allgemeinen Grundsätze hat Verfasser als unnützen Ballast über Bord geworfen; sie sind theils unfruchtbar, theils aber eine Quelle immer wiederkehrender Fehler, wie nicht wenige Lehrer übereinstimmend bezeugt haben. Eine allgemeine Einleitung in die elementare Mathematik soll dem geometrischen Theile des Werkes voraufgehen, da sie dort vornehmlich an ihrem Platze zu sein scheint.

Obigem Zwecke entsprechend sind die Erklärungen, namentlich die der sieben Rechnungsarten, aber auch alle übrigen, so aufgestellt, wie sie sich unmittelbar ergeben und wie sie darum auch allein dem genetischen Unterrichte zu dienen im Stande sind. Mittelst dieser Definitionen werden auch sämmtliche Lehrsätze (in der praktischen Form als „Regeln" bezeichnet) gefunden, d. h. bewiesen, indem man von der vorliegenden Aufgabe ausgeht und darin das neue Wort erklärt. Die sonst üblichen Beweise für die Gesetze namentlich der inversen Rechnungsarten haben das gegen sich, daß sie nur Nachweise der Richtigkeit, d. h. nur dann möglich sind, wenn die Behauptung bereits vorliegt. Vollständig ausgeführt sind in dem vorliegenden Lehrbuche diejenigen Beweise, deren Auffindung eine reifere Urtheilskraft voraussetzt, als sie von dem Schüler auf der jedesmaligen Unterrichtsstufe erwartet werden darf; diejenigen Gesetze dagegen, die der Schüler auf Grund der von ihm gewonnenen Einsicht selbst entdecken kann, sind ohne Beweis aufgeführt. Die zahlreichen Aufgaben, welche dem Lehrgebäude eingefügt sind, gehen ebenfalls darauf aus, die Selbstthätigkeit des Schülers auf einem Gebiete in Anspruch zu nehmen, welches er vollständig beherrscht. Die dem Lehrbuche beigegebenen Beispiele sind mit besonderer Rücksicht auf Lehrhaftigkeit ausgewählt und sollen auch in der Form der Lösung dem Schüler Vorbilder bieten.

Schließlich sei betreffs der gewählten Terminologie darauf hingewiesen, daß, wo sie etwa von sonst gebräuchlicher abweicht, dies durchweg aus pädagogischen Gründen geschehen ist, namentlich um Verwechslungen zu vermeiden; wie z. B. Function statt des hier und da gebräuchlichen Wortes Form aus späteren Theilen der Mathematik in die Arithmetik herübergenommen, wie ferner Radix statt Wurzel gewählt ist; aus demselben Grunde sind die Ausdrücke Quadrat und Kubus sammt den davon abgeleiteten in der Arithmetik vermieden, und statt Kennziffer lieber das ebenso gebräuchliche Wort Charakteristik gewählt worden. Ein Vorwurf kann dem Lehrbuche daraus selbst nicht von denen gemacht werden, die hierin anderer Ansicht sind, denn es wird ihnen leicht sein, die ihnen geläufigen Ausdrücke an die Stelle zu setzen. [Aus dem Vorwort.]

Methodisch geordnete Aufgabensammlung, mehr als 7000 Aufgaben enthaltend, über alle Theile der Elementar-Arithmetik für Gymnasien, Realschulen und polytechnische Lehranstalten. Von Dr. E. Bardey. gr. 8. 1871. geh. 27 Ngr.

Das Buch enthält vierzig Abschnitte, beginnt mit Vorübungen und einer Einführung in die Buchstabenrechnung und endigt mit den Gleichungen des vierten Grades und der Auflösung der Gleichungen durch Näherung. Es ist dazu bestimmt, in den Händen der Schüler zu sein und beim Unterrichte zum Grunde zu liegen. Nach der Ansicht des Verfassers ist es nämlich bei der allgemeinen

Arithmetik noch viel nothwendiger als beim gewöhnlichen Rechnen, daß der Schüler eine große Anzahl geordneter und geeigneter Aufgaben in Händen habe.

Die Zahl der Aufgaben sowohl schwieriger als auch leichter und einfacher Art ist so groß, daß sie nicht nur für die fähigsten Schüler ausreichen wird, sondern daß mit ihrer Hülfe auch die schwächeren Schüler zur vollständigen Klarheit der vorgetragenen Sätze, zur Geläufigkeit in der Anwendung derselben und zur Fertigkeit im Lösen der betreffenden Aufgaben gebracht werden können.

Um das Interesse der Schüler rege zu erhalten und sie zu befähigen, die Rechnung auf recht verschiedenartige Verhältnisse anzuwenden, ist eine möglichst große Mannigfaltigkeit der Aufgaben angestrebt und auf eine stufenmäßige Reihenfolge derselben alle Sorgfalt verwendet worden.

Die Gleichungen des ersten und zweiten Grades mit einer und mit mehreren Unbekannten und ihre Anwendungen sind als der wichtigste und interessanteste Theil der Arithmetik in so umfassender Weise bearbeitet, wie es bis jetzt schwerlich in einer Aufgabensammlung oder in einem Lehrbuche geschehen ist.

Ordnung und Uebersichtlichkeit der Darstellung möchten das Buch noch besonders empfehlenswerth machen. Der Schüler wird sich leicht orientieren und es nicht ungern in die Hand nehmen.

Die Resultate sind in einem besonderen Hefte enthalten, kommen aber nicht in den Buchhandel, sie werden von der Verlagshandlung nur direkt an Lehrer auf deren speciellen Wunsch gegen Einsendung von 10 Ngr. in Briefmarken franco versandt.

Von demselben Verfasser erschien früher:

Algebraische Gleichungen nebst den Resultaten und den Methoden zu ihrer Auflösung. Von Dr. E. Bardey. gr. 8. 1868. geh. n. 1 Thlr. 10 Ngr.

Quadratische Gleichungen mit den Lösungen für die oberen Klassen der Gymnasien und Realschulen. Von Dr. E. Bardey. gr. 8. 1871. geh. n. 16 Ngr.

Brockmann, F. J., Lehrer der Mathematik und Physik am königl. Gymnasium zu Cleve, Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Für Gymnasien und Realschulen bearbeitet. [Mit 46 Holzschnitten im Text.] gr. 8. 1869. geh. n. 16 Ngr.

Herr Dr. Wiegand in Halle sagt am Schlusse einer eingehenden Recension in der „Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht" über dieses schon vielfach eingeführte Buch: „wir erklären, dass wir es hier mit einem ganz vortrefflichen Schulbuche zu thun haben, das auch polytechnischen Schulen genügen wird und ganz besonders zum Privatstudium empfohlen werden kann. Die Ausstattung ist, wie bei allen Schriften, die aus der Teubner'schen Officin hervorgehen, ganz vorzüglich, der Druck correct und der Preis (9¾ Bogen für 16 Ngr.) ausserordentlich billig."

Brockmann, F. J., Lehrer der Mathematik und Physik am königl. Gymnasium zu Cleve, Lehrbuch der elementaren Geometrie für Gymnasien und Realschulen bearbeitet. Erster Theil. Die Planimetrie. [Mit 139 Figuren in Holzschnitt.] gr. 8. 1871. geh. n. 20 Ngr.

In gleicher Weise wie die mit allseitigem Beifall aufgenommene Trigonometrie hat der Verfasser die Planimetrie nach streng wissenschaftlichen Principien bearbeitet.



